Cours d'électromagnétisme
EM0-Outils mathématiques

Table des matières

1 Les systèmes de coordonnées **2**
1.1 Les coordonnées cartésiennes . . . 2
1.2 Les coordonnées cylindriques . . . 3
1.3 Les coordonnées sphériques . . . 4

2 Relation entre coordonnées **4**

3 L'opérateur nabla **5**
3.1 L'opérateur nabla . . . 5
3.2 Gradient d'un champ scalaire . . . 5
3.2.1 Gradient en coordonnées cartésiennes . . . 5
3.2.2 Gradient dans d'autres systèmes de coordonnées . . . 6
3.3 Divergence d'un champ vectoriel . . . 7
3.4 Rotationnel d'un champ vectoriel . . . 7

4 Références **8**

1 Les systèmes de coordonnées

En physique, selon la physionomie du problème étudié, on choisit entre trois systèmes de coordonnées :

1.1 Les coordonnées cartésiennes

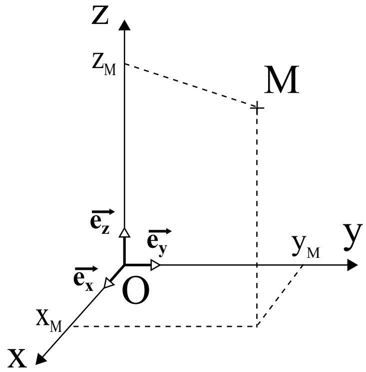

FIGURE 1 – Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont les coordonnées les plus faciles à manipuler. Un point M de l'espace est repéré par trois coordonnées : x_M, y_M, z_M.

Le repère est muni de trois vecteurs unitaires ($\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$) qui donnent l'orientation de celui-ci.

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire est noté :

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z} \quad (1)$$

On peut aussi définir une surface élémentaire (dans le plan xOy par exemple) :

$$dS = dx \times dy \quad (2)$$

Enfin, on peut définir un volume élémentaire :

$$d\tau = dx \times dy \times dz \quad (3)$$

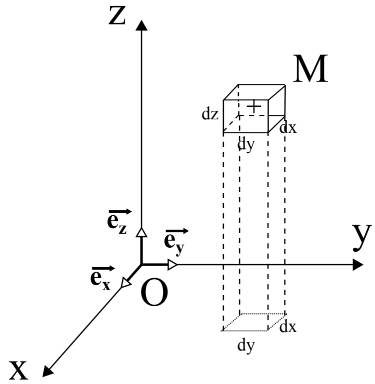

FIGURE 2 – Volume et surface élémentaires en coordonnées cartésiennes

1.2 Les coordonnées cylindriques

Dans ce système de coordonnées, un point M de l'espace est repéré par un rayon r_M, un angle θ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon OM sur le plan xOy), et une hauteur z (par rapport au plan xOy).

On définit aussi trois vecteurs unitaires $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ que l'on place généralement au niveau du point M ou de son projeté sur la plan xOy.

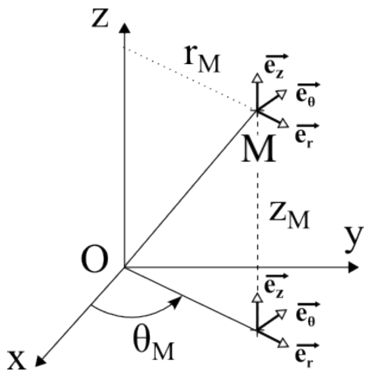

Figure 3 – Coordonnées cylindriques

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z} \tag{4}$$

Ainsi une surface élémentaire s'écrit :

$$dS = dr \times rd\theta \tag{5}$$

Et un volume élémentaire est défini par :

$$d\tau = dr \times rd\theta \times dz \tag{6}$$

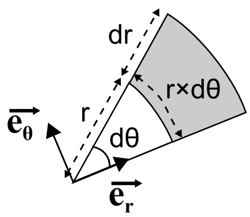

Figure 4 – Surface élémentaire en coordonnées cylindriques

1.3 Les coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées, un point M de l'espace est repéré par un rayon $r = OM$, et deux angles : un angle θ (angle entre l'axe Oz et le rayon OM), un angle ϕ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon OM sur le plan xOy).

Trois vecteurs unitaires ($\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_\phi}$) donnent l'orientation du repère.

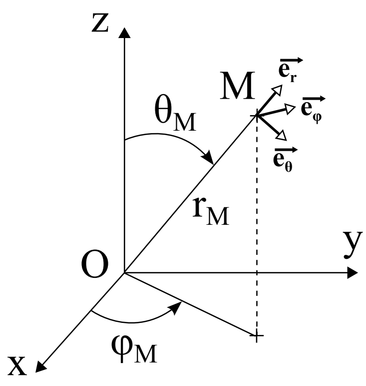

FIGURE 5 – Coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\sin\theta d\phi\,\overrightarrow{e_\phi} \tag{7}$$

Une surface élémentaire s'écrit :

$$dS = rd\theta \times rsin\theta d\phi \tag{8}$$

Et un volume élémentaire est défini par :

$$d\tau = dr \times rd\theta \times rsin\theta d\phi \tag{9}$$

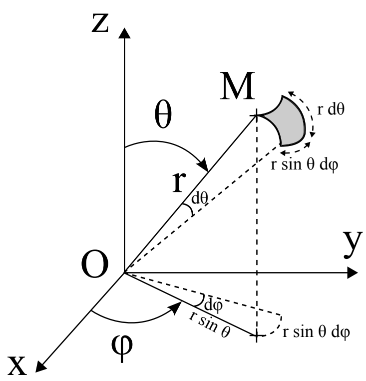

FIGURE 6 – Surface élémentaire en coordonnées cylindriques

2 Relation entre les différents systèmes de coordonnées

Il peut être intéressant de connaître les relations entre les différents systèmes de coordonnées : par exemple entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques, que vaut r en fonction de x et y ? que vaut θ ? quelles relations y a t-il entre les vecteurs unitaires de la base cartésienne, et ceux de la base cylindrique ?

Voici les relations à connaître et à savoir retrouver :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{10}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{11}$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \tag{12}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y} \tag{13}$$

On peut aussi avoir besoin des relations dans l'autre sens : expressions de x et y en fonction de r et θ, expressions de $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ en fonction de $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$.

Elles sont faciles à retrouver grace aux quatre lignes écrites précédemment ou aux figures ci-contre :

$$x = r\cos\theta \tag{14}$$
$$y = r\sin\theta \tag{15}$$

$$\overrightarrow{e_x} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \tag{16}$$
$$\overrightarrow{e_y} = \sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta} \tag{17}$$

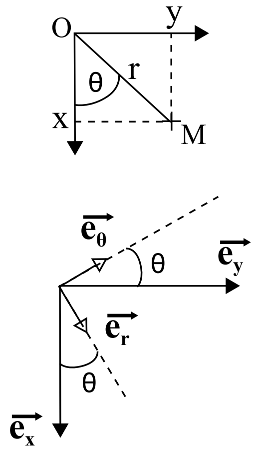

Figure 7 – Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques

Dans le même esprit, on peut exprimer les coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes, et inversement.

3 L'opérateur nabla : gradient, divergence ou rotationnel

3.1 L'opérateur nabla

L'opérateur nabla noté $\overrightarrow{\nabla}$ peut agir sur un champ scalaire (comme le potentiel électrostatique) ou sur un champ de vecteurs (comme le champ électrostatique).

En coordonnées cartésiennes, celui-ci s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla}\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{array}\right. \tag{18}$$

Selon comment il est appliqué au champ (scalaire ou vectoriel) en question, l'opérateur nabla prend d'autres noms :

3.2 Gradient d'un champ scalaire

3.2.1 Gradient en coordonnées cartésiennes

On peut appliquer l'opérateur nabla directement sur un champ de scalaire, on a alors :

$$\overrightarrow{\nabla} V = \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{19}$$

en coordonnées cartésiennes.

Notons que le gradient est un opérateur qui prend un **champ scalaire en entrée** et qui **renvoie un vecteur**.

3.2.2 Gradient dans d'autres systèmes de coordonnées

Lien entre gradient et différentielle totale d'une fonction

En mathématique, si une fonction f dépend de trois variables (x, y et z), sa différentielle totale s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{20}$$

On peut écrire cette différentielle comme étant le produit scalaire entre le gradient de f et le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$:

$$df = \overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \tag{21}$$

Gradient en coordonnées cylindriques

Grâce à la formule ci-dessus, on peut exprimer le gradient dans d'autres systèmes de coordonnées.

On exprime la différentielle totale de f dans le système de coordonnées :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{22}$$

On identifie celle-ci avec la différentielle donnée par le produit scalaire calculé dans l'équation 21 :

$$df = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{grad} f)_r \\ (\overrightarrow{grad} f)_\theta \\ (\overrightarrow{grad} f)_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{vmatrix} = (\overrightarrow{grad} f)_r\, dr + (\overrightarrow{grad} f)_\theta\, r\, d\theta + (\overrightarrow{grad} f)_z\, dz \tag{23}$$

On a donc l'expression ci-dessous pour le gradient de f en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{24}$$

Un travail identique peut être fait avec le système de coordonnées sphériques.

L'opérateur nabla en coordonnées cylindriques

Ce travail nous permet d'écrire l'expression de l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques. En effet, à partir de l'équation 4 :

$$\overrightarrow{\nabla}\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{array}\right. \tag{25}$$

3.3 Divergence d'un champ vectoriel

Si on effectue le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs, on calcule la divergence de ce champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} = div\,\overrightarrow{E} = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{l}E_x\\ E_y\\ E_z\end{array}\right. = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{26}$$

en coordonnées cartésiennes.

Notons que la divergence est un opérateur qui prend un **champ vectoriel en entrée** et qui **renvoie un scalaire**.

Remarque

Attention, le calcul de ce produit scalaire paraît simple, mais des raccourcis ont été pris pour parvenir rapidement au résultat.
N'oublions pas que le produit scalaire est distributif, et le développement de $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}$ donne une expression assez longue :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} = {} & \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x}\cdot E_x\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x}\cdot E_y\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x}\cdot E_z\overrightarrow{e_z}\\ & +\overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y}\cdot E_x\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y}\cdot E_y\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y}\cdot E_z\overrightarrow{e_z}\\ & +\overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\cdot E_x\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\cdot E_y\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\cdot E_z\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{27}$$

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, ne dépendent pas des coordonnées (x, y et z), on peut donc les sortir des dérivations.
Sachant ensuite que $\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_i} = 1$ et que $\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j} = 0$, l'expression 27 se simplifie largement.

Mais attention !!! En coordonnées cylindriques par exemple, les vecteurs unitaires de la base peuvent dépendre des coordonnées : notamment $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ dépendent de θ (voir équations (12) et (13)). On ne peut donc pas forcément les sortir des dérivations, les simplifications sont moindres et l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques est plus compliquée.

3.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Enfin, si on effectue un produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs, on calcule le rotationnel de ce champ de vecteurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} &= \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array} \right. \\ &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} \qquad (28)\end{aligned}$$

en coordonnées cartésiennes.

Notons que le rotationnel est un opérateur qui prend un **champ vectoriel en entrée** et qui **renvoie un vecteur**.

Remarque

Au vu de cette expression, déjà compliquée, on imagine la complexité de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques ou sphériques.

4 Références

— "Electromagnétisme PCSI" - P.Krempf - Editions Bréal 2003 ;

— "Physique Cours compagnon PCSI" - T.Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009 ;

— "Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI" - JM.Brébec - Editions Hachette ;

— "Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique" - D.Cordier - Editions Dunod ;

— http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques

— http://epiphys.emn.fr

EM0 : outils mathématiques
L'essentiel

Elément infinitésimaux en coordonnées cartésiennes

Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

Surface élémentaire

$$dS = dx \times dy$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dx \times dy \times dz$$

Elément infinitésimaux en coordonnées cylindriques

Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

Surface élémentaire

$$dS = dr \times rd\theta$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dr \times rd\theta \times dz$$

Elément infinitésimaux en coordonnées sphériques

Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\sin\theta d\phi\,\overrightarrow{e_\phi}$$

Surface élémentaire

$$dS = rd\theta \times rsin\theta d\phi$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dr \times rd\theta \times rsin\theta d\phi$$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \qquad \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_x} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{e_y} = \sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

Gradient d'un champ scalaire

Si on applique l'opérateur nabla directement sur un champ de scalaire, on obtient le gradient de ce champ : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} V = \overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

On peut l'exprimer en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} V = \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

Divergence d'un champ vectoriel

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel donne naissance à la divergence : en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = div\, \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

Le produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs donne naissance au rotationnel de ce vecteur : en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$