

# Cours d'électromagnétisme

## EM11-Champ électrostatique

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Qu'est ce que l'électromagnétisme ?	2
1.2	Naissance de la relation entre l'électricité et le magnétisme	2
1.3	La physique et l'unification	2
<b>2</b>	<b>Loi de Coulomb</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Champ et charge ponctuelle</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Champ et distribution discrète</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Distributions continues de charges</b>	<b>6</b>
5.1	Distributions continues	6
5.2	Champ électriques créés par des distributions continues	6
5.3	Définition et continuité du champ électrique	7
<b>6</b>	<b>Lignes de champ</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Symétries et invariances</b>	<b>8</b>
7.1	Invariances	8
7.2	Symétries et antisymétries	9
7.2.1	Plan de symétrie	10
7.2.2	Plan d'antisymétrie	11
<b>8</b>	<b>Calcul par méthode intégrale</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Théorème de Gauss</b>	<b>13</b>
9.1	Flux du champ électrique	13
9.2	Enoncé du théorème de Gauss	14
9.3	Théorème de Gauss et fil infini	14
<b>10</b>	<b>Références</b>	<b>15</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Qu'est ce que l'électromagnétisme ?

L'interaction électromagnétique est une des **quatre interactions fondamentales** : ces interactions régissent à elles seules tous les phénomènes physiques de l'univers.

Les trois autres interactions connues sont la gravitation (qui se manifeste surtout avec les corps très massiques), l'interaction forte (celle qui assure la cohésion des noyaux des atomes) et l'interaction faible (qui permet notamment les réactions nucléaires).

	<b>Interaction faible</b>	<b>Interaction forte</b>	<b>Interaction électromagnétique</b>	<b>Interaction gravitationnelle</b>
<b>Echelle d'action</b>	$10^{-18}$ m	$10^{-15}$ m	de $10^{-15}$ à $10^0$ m	de $10^0$ à $10^{26}$ m
<b>Portée</b>	très courte	courte	infinie	infinie
<b>Rôle</b>	Radioactivité	Cohésion du noyau	Cohésion de l'atome	Cohésion des galaxies

TABLE 1 – Les interactions fondamentales

Alors qu'électricité et magnétisme étaient considérés comme deux phénomènes indépendants, Maxwell, grâce aux travaux de ces prédécesseurs, formalise 4 équations qui les unissent. Voyons brièvement comment il en est arrivé là :

## 1.2 Naissance de la relation entre l'électricité et le magnétisme

**Etymologie** L'électromagnétisme est donc née grâce au rapprochement de l'électricité et du magnétisme. Rappelons qu'électricité vient du mot "elektron" qui signifie ambre en grec ; magnétisme vient d'une pierre qui venait de la ville de magnésie et qui avait pour propriété d'attirer des petits bouts de fer (plus tard cette pierre fut appelée aimant du grec "Adamas" qui signifie acier).

**La foudre et la boussole** La relation entre ces deux domaines est venue de l'observation de la foudre ; celle-ci, phénomène électrique, faisait dévier l'aiguille aimantée d'une boussole. Plus tard, les travaux d'Oersted (en 1820) démontre qu'un courant qui traverse un fil engendre le déplacement d'une aiguille aimantée située dans son voisinage.

**Ampère et Arago** C'est Ampère (toujours en 1820) qui formalisera tout cela, il montre alors qu'une bobine de fil parcourue par un courant électrique se comporte comme un aimant. Arago profite de ces découvertes pour inventer l'électroaimant dans la même année.

**Le télégraphe de Morse** Enfin, une invention vient sceller l'existence de l'électromagnétisme : le télégraphe de Morse en 1832, combine des signaux électriques et des électroaimants pour transporter sur de grandes distances des messages codés.

## 1.3 La physique et l'unification

**La loi ultime** Cela tombe bien que l'électricité et le magnétisme soit intimement liés car les physiciens cherchent à trouver une loi mathématique qui permettrait de décrire tous les phénomènes physiques connus.

**Faraday et l'induction** Faraday, en découvrant l'induction électromagnétique (la variation du champ magnétique à travers un circuit induit un courant dans celui-ci) prouve une nouvelle fois le lien entre les deux domaines, il expliqua sa découverte en parlant de champ magnétique et de champ électrique, mais sans formalisme mathématique.

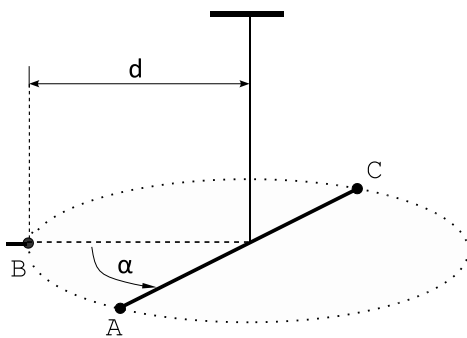
**Maxwell et le "Graal"** C'est Maxwell qui fit le travail et trouva les lois mathématiques qui unissaient électricité et magnétisme. Il donne naissance initialement à 20 puis 8 équations, qui seront simplifiées en 4 par un dénommé Heaveside, toujours enseignées actuellement, nommées "équations de Maxwell".

Ces équations font d'ailleurs apparaître une vitesse  $c$ , qui montre que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'influencent mutuellement et se propagent à cette vitesse, indépendamment de toute charge ou de tout courant. Deux physiciens réalisent des mesures sur cette fameuse vitesse et trouvent des valeurs proches de celle de la vitesse de la lumière.

Maxwell en conclura que la lumière est une onde électromagnétique, un champ  $\vec{E}$  et un champ  $\vec{B}$  qui s'influencent et se propagent à la vitesse  $c$ .

## 2 Loi de Coulomb, interaction électrostatique

A la suite des suppositions de Joseph Priestley, qui présentait que la force électrique se comportait comme celle de la gravitation de Newton (en étant inversement proportionnelle au carré de la distance entre les charges), Charles Augustin de Coulomb le vérifia grâce à une balance de torsion :



A : sphère métallique initialement neutre

B : sphère chargée

C : contrepoids

Principe :

En approchant B de A, la sphère A se charge par contact avec la sphère B. Ayant la même charge, les deux sphères se repoussent. La torsion du fil vient équilibrer le moment de la force électrostatique.

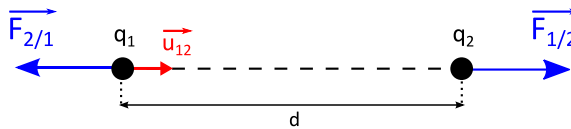
FIGURE 1 – L'expérience de Coulomb et sa balance de torsion

La loi de Coulomb permet d'exprimer la force qui s'exerce entre deux particules chargées distantes de  $d$  :

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = k \times \frac{q_1 q_2}{d^2} \times \vec{u}_{12}} \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} : \text{force exercée par la charge 1 sur la charge 2} \\ \text{en Newton (N).} \\ k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 SI : \text{constante de Coulomb.} \\ \epsilon_0 : \text{permittivité du vide.} \\ q_1, q_2 : \text{charge électrique en Coulomb (C).} \\ d : \text{distance entre les charges en mètre (m).} \\ \vec{u}_{12} : \text{vecteur unitaire qui permet de donner la direction} \\ \text{de la force d'interaction.} \end{array} \right.$$

Si on souhaite représenter les forces sur un schéma, deux cas peuvent se présenter :

- Si les charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signe : répulsion :



- Si les charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de signe contraire : attraction :

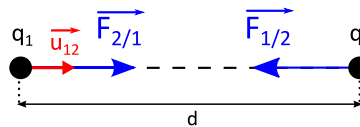


FIGURE 2 – Attraction ou répulsion des charges selon leur signe

## Compléments

- Rappelons qu'une charge électrique (comme  $q_1$  ou  $q_2$ ), qui s'exprime en Coulomb, est forcément un **multiple de la charge élémentaire**  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ .

En effet cette charge qui représente en valeur absolue la charge de l'électron (découvert par Thomson en 1897), est la plus petite charge électrique connue, elle a été mesurée précisément par Robert Millikan en 1909. Dans son expérience, il injecte des gouttelettes d'huile électrisées à l'intérieur d'un condensateur et mesure les forces qui s'exercent sur celles-ci, il en déduit la charge de l'électron.

Les charges électriques peuvent être positives ou négatives. Au début de l'électrostatique, les scientifiques avaient rencontrés des corps conducteurs et isolants (Gray en 1729), mais aussi distingués deux types d'électricité : la vitreuse et la résineuse (Du Fay, au 18<sup>ème</sup> siècle). C'est après Benjamin Franklin (au cours du même siècle) et sa théorie du fluide électrique que l'on qualifia les "deux électricités" de positive et négative.

- On dit qu'il y a **interaction** électrostatique entre  $q_1$  et  $q_2$  car les forces qui agissent l'une sur l'autre sont de valeur égale mais de sens opposé :  $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$   
 $q_1$  exerce une force sur  $q_2$  et dans le même temps,  $q_2$  exerce une force sur  $q_1$  (on a déjà rencontré cela dans la troisième loi de Newton de la mécanique aussi appelé principe des actions réciproques).
- Enfin cette interaction est **électrostatique** car les charges qui la concerne sont **immobiles**.

Dorénavant, on confondra champ électrostatique et champ électrique.

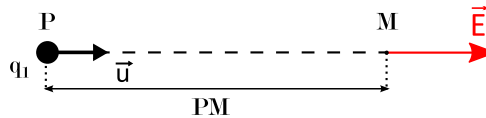
### 3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

La seule présence d'une charge électrique  $q_1$  dans un espace suffit à rayonner un champ électrique dont l'intensité dépend de cette charge.

Si la charge  $q_1$  est située en P, elle rayonne en un point M situé à une distance  $r$ , le champ :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}} \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} : \text{champ électrostatique exprimé en volt par mètre (V.m}^{-1}\text{)} \\ \epsilon_0 : \text{permittivité du vide.} \\ q_1 : \text{charge électrique au point P en Coulomb (C).} \\ r : \text{distance entre les points P et M en mètre (m).} \\ \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM} : \text{vecteur unitaire qui donne la direction du champ.} \end{array} \right.$$

• Si  $q_1 > 0$  :



• Si  $q_1 < 0$  :

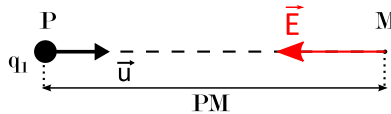


FIGURE 3 – Signe de la charge et sens du champ électrostatique

Ainsi, si une charge  $q_2$  est située en M, elle subit la force électrostatique :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}} \quad (3)$$

### 4 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles (distribution discrète de charges)

#### Distribution discrète

Une distribution discrète de charges est un ensemble de charges électriques ponctuelles proches les unes des autres.

#### Champ créé par une distribution discrète

Le **principe de superposition** dit que le champ électrique rayonné en un point M de l'espace voisin de la distribution discrète est égal à la somme des champs électriques créés par chaque charge de celle-ci. Il y a **additivité des champs électriques**.

Soit N charges électriques portant la charge  $q_i$  situé en  $P_i$ , le champ électrique créé au point

M vérifie :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M^2} \vec{u}_i \quad \vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M} \quad (4)$$

## 5 Distributions continues de charges et champ électrique

### 5.1 Distributions continues

Lorsque les charges électriques sont infiniment proches les unes de autres, la distribution n'est plus discrète mais **continue**.

#### Remarque

Pour comprendre la notion de distribution discrète et continue, faisons une analogie avec une classe pleine d'élèves surveillés par un professeur : si on est situé dans la classe avec les élèves, on peut sans souci compter le nombre d'élèves, on peut les distinguer un à un : la distribution d'élèves est discrète.

Par contre si le professeur se place à 500m au dessus de la classe, les élèves seront trop proches et il ne peut plus compter les élèves. il a juste une idée de la densité d'élèves dans la classe : la distribution est continue.

On rencontre 3 types de distributions continues de charges :

- Dans les **distributions linéiques**, les charges sont réparties sur une ligne. Cette ligne porte une **densité linéique de charge** notée  $\lambda$  exprimée en  $C.m^{-1}$ .  
Dans cette distribution, un morceau infinitésimal  $dl$  de cette ligne porte la charge  $dq = \lambda \times dl$ .
- Dans les **distributions surfaciques**, les charges sont réparties sur une surface. Celle-ci porte une **densité surfacique de charge** notée  $\sigma$  exprimée en  $C.m^{-2}$ .  
Dans cette distribution, une portion infinitésimale  $dS$  de cette surface porte la charge  $dq = \sigma \times dS$ .
- Dans les **distributions volumiques**, les charges sont réparties dans un volume. Celui-ci porte une **densité volumique de charge** notée  $\rho$  exprimée en  $C.m^{-3}$ .  
Dans cette distribution, une portion infinitésimale  $d\tau$  de ce volume porte la charge  $dq = \rho \times d\tau$ .

### 5.2 Champ électriques créés par des distributions continues

Dans le cas de ces distributions continues, chaque portion de ligne, surface ou volume portant la charge  $dq$  crée un champ élémentaire  $d\vec{E}$ .

Pour obtenir le champ électrique total en un point M, il faut sommer (de façon continue) ces champs élémentaires sur l'ensemble de la ligne, de la surface ou du volume.

Ainsi, on a recourt à des intégrales :

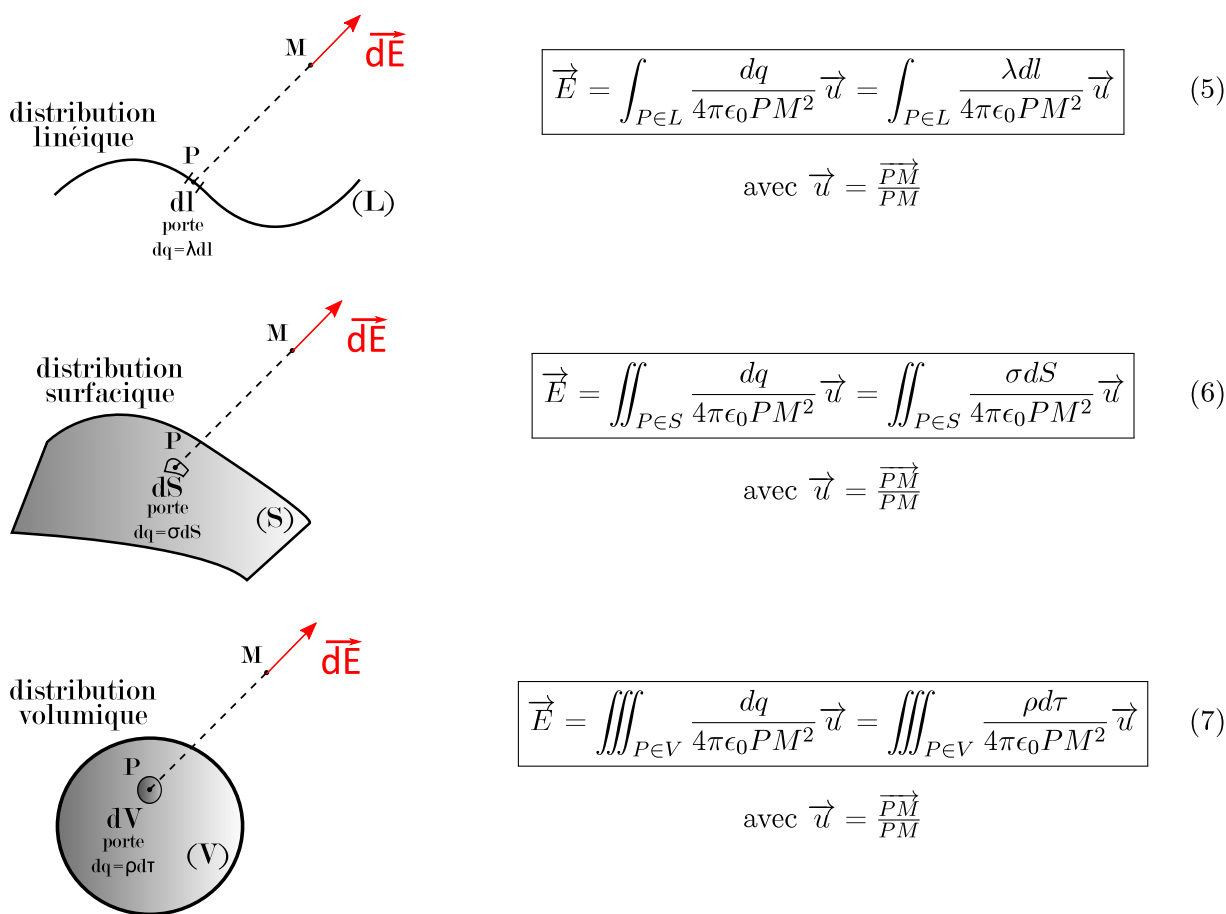


FIGURE 4 – Distributions continues et champs associés

### 5.3 Définition et continuité du champ électrique

Mathématiquement, les intégrales écrites précédemment impliquent certaines contraintes en terme de définition et de continuité des champs :

- Dans le cas d’une distribution linéique de charges, le champ est défini et continu en tout point de l’espace sauf sur la distribution elle-même.
- Dans le cas d’une distribution surfacique de charges, le champ est défini et continu en tout point de l’espace sauf sur la distribution elle-même. Il est donc discontinu à la traversée de la surface.
- Dans le cas d’une distribution volumique de charges, le champ est défini et continu en tout point de l’espace, sans restriction.

## 6 Visualisation d’un champ électrique : lignes de champ

La présence d’un champ électrique n’est pas quelque chose de facile à visualiser. Grâce aux lignes de champ, on a une idée de la cartographie du champ électrique dans une portion d’espace. Une **ligne de champ** est une ligne orientée dans le sens du champ électrique, en chaque point de celle-ci, le champ électrique est tangent.

La valeur du champ  $\vec{E}$  peut varier le long d’une ligne de champ, les lignes de champ ne permettent donc de connaître que la direction du champ.

Cependant, dans une région vide de charge, plus les lignes de champs sont serrées, plus le champ

électrique est intense.

Sur la figure 5 sont représentées les lignes de champs pour deux distributions de charges.

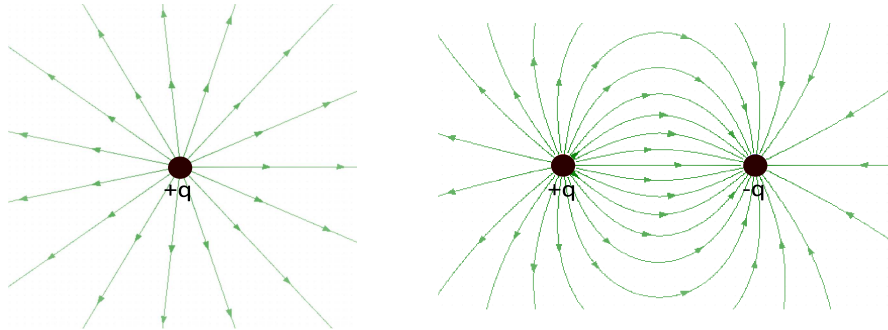


FIGURE 5 – Lignes de champ pour deux distributions de charges

## 7 Symétries et invariances

Comme nous avons pu le voir plus haut, il ne semble pas évident de calculer des champs électriques. En effet, selon la distribution continue de charges qui est à la source du champ, apparaît dans le calcul du champ électrique des intégrales doubles ou triples.

De plus le champ électrique en un point de l'espace possède plusieurs composantes et dépend de plusieurs paramètres :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z \quad (8)$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z \quad (9)$$

- En coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \phi)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \phi)\vec{e}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi)\vec{e}_\phi \quad (10)$$

La considération des symétries et invariances d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de  $\vec{E}(M)$  et donc de simplifier le calcul d'intégrales.

### 7.1 Invariances

Les invariances vont nous permettre **d'éliminer des coordonnées dont dépend le champ électrique** en un point M.

Il y a invariance lorsque la vue de la distribution est identique en un point M et un point M' (M' obtenu par translation ou rotation depuis M), ou bien si le champ électrique calculé en M et en M' est identique.

Voyons quelques exemples :



### Invariance par translation selon un axe

Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point  $M$  et depuis un point  $M'$ , image par translation de  $M$ , la même distribution) alors le champ électrique ne doit pas non plus subir de changement.

Si cet axe est  $Oz$  (systèmes de coordonnées cartésiennes ou polaires), alors les composantes du champ électrique ne dépendront pas de la coordonnée  $z$  :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y + E_z(x, y)\vec{e}_z \quad (11)$$

ou

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta)\vec{e}_z \quad (12)$$

### Invariance par rotation autour d'un axe

Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ électrique ne doit pas non plus subir de changement.

Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ électrique ne dépendront pas de la coordonnée  $\theta$  (systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques) :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, z)\vec{e}_z \quad (13)$$

ou

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \phi)\vec{e}_r + E_\theta(r, \phi)\vec{e}_\theta + E_\phi(r, \phi)\vec{e}_\phi \quad (14)$$

### Cas de la sphère

Dans une distribution sphérique, il y a invariance par rotations autour du point  $O$ , centre de la sphère, on s'affranchit des coordonnées  $\theta$  et  $\phi$ .

Mais cette distribution n'est pas invariante par translation suivant  $r$ , car on ne voit pas la même distribution en se déplaçant suivant un rayon : si on prend un point  $M$  à l'intérieur de la sphère, il est entouré de charges alors qu'un point  $M'$  situé sur le même rayon mais en périphérie de la sphère ne voit que des charges en dessous de lui.

En dehors de la sphère, le champ électrique dépendant de la distance aux charges, celui-ci ne serait pas le même à proximité de la sphère et très loin d'elle.

## 7.2 Symétries et antisymétries

Les symétries et antisymétries vont nous permettre **d'éliminer des composantes du champ électrique**.

En effet, un principe appelé **principe de Curie** dit que les symétries des causes doivent se retrouver dans les effets : la symétrie de la distribution de charge se retrouvera dans l'expression du champ électrique.

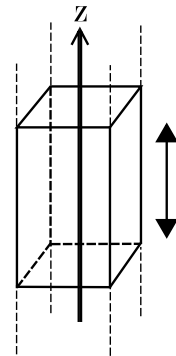


FIGURE 6 – Invariance par translation

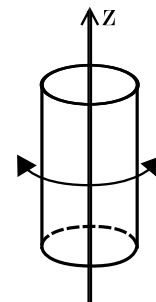


FIGURE 7 – Invariance par rotation

### 7.2.1 Plan de symétrie

#### Cas général

Si la distribution admet un plan de symétrie  $\Pi$  alors le champ appartient nécessairement à ce plan.

En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en  $P$  qui porte la charge  $dq$  crée en  $M$  le champ  $d\vec{E}_P$  et son symétrique par rapport à  $\Pi$ , situé en  $P'$  qui porte aussi la charge  $dq$  crée en  $M$  le champ  $d\vec{E}_{P'}$ .

La somme de  $d\vec{E}_P$  et de  $d\vec{E}_{P'}$  donne un vecteur  $d\vec{E}$  contenu dans  $\Pi$ .

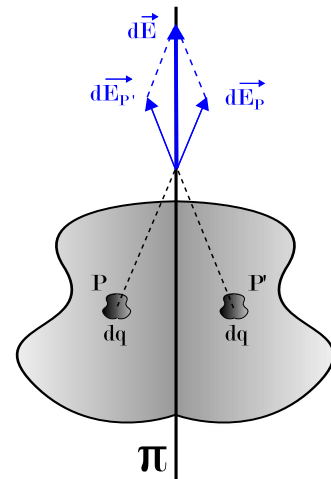


FIGURE 8 – Plan de symétrie et champ

#### Exemple du fil infini

Le plan  $\pi_1$  est un plan de symétrie pour la distribution (le fil), le champ  $d\vec{E}$  doit être contenu dans ce plan : il ne peut donc pas avoir de composante selon  $\vec{e}_z$ .

Le plan  $\pi_2$  est lui aussi un plan de symétrie pour la distribution, le champ  $d\vec{E}$  doit être contenu dans ce plan : il ne peut donc pas avoir de composante selon  $\vec{e}_\theta$ .

Donc le champ  $d\vec{E}$  n'a qu'une composante suivant  $\vec{e}_r$  et s'écrit :

$$d\vec{E}(M) = dE_r(M)\vec{e}_r \quad (15)$$

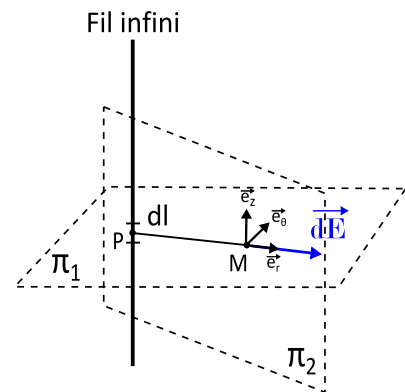


FIGURE 9 – Plan de symétrie du fil infini

## 7.2.2 Plan d'antisymétrie

### Cas général

Si la distribution admet un plan de symétrie  $\Pi'$  alors le champ est nécessairement orthogonal à ce plan.

En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq crée en M le champ  $d\vec{E}_P$ , son symétrique par rapport à  $\Pi'$ , situé en P' porte lui, la charge -dq, il crée en M le champ  $d\vec{E}_{P'}$ .

La somme de  $d\vec{E}_P$  et de  $d\vec{E}_{P'}$ , donne un vecteur  $d\vec{E}$  orthogonal au plan  $\Pi'$ .

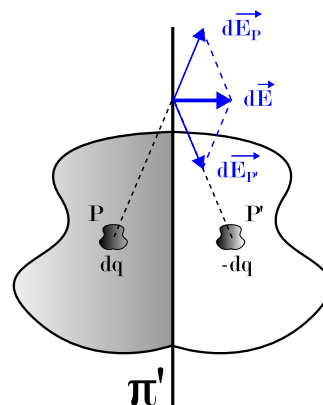


FIGURE 10 – Plan d'antisymétrie et champ

### Exemple du condensateur

Le plan  $\Pi'$  est un plan d'antisymétrie pour le condensateur car les charges portées par ses deux plaques sont opposées. Ainsi, l'addition des champs élémentaires créés par une portion de surface de chaque plaque, donne un champ perpendiculaire à  $\Pi'$ .

Si on utilise des coordonnées cartésiennes, on élimine avec cette antisymétrie les composantes suivant  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ .

Le champ s'écrit :

$$d\vec{E}(M) = dE_x(M)\vec{e}_x \quad (16)$$

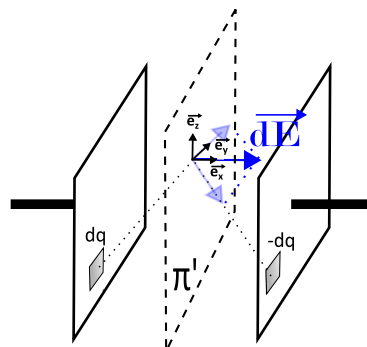


FIGURE 11 – Antisymétrie et condensateur

## 8 Calcul de champ par méthode intégrale : exemple du fil infini

Voici la première méthode qui permet de calculer le champ électrostatique créé par une distribution continue de charge. Ce n'est pas la plus simple, mais nous pouvons mener le calcul à son terme grâce à la détermination préalable des symétries et invariances.

1. **Symétries et invariances** : Le fil infini est la distribution continue la plus simple que l'on peut rencontrer. On se place dans un repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

- Pour ce qui est des invariances, le fil étant infini, la distribution est invariante si l'on se translate le long du fil. Le fil étant dirigé suivant l'axe Oz, la coordonnée z est éliminée. Aussi, la distribution est inchangée par rotation autour du fil, la coordonnée  $\theta$  est éliminée. Ainsi :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r + E_\theta(r)\vec{e}_\theta + E_z(r)\vec{e}_z \quad (17)$$

- Pour ce qui est des symétries, nous en avons parlé précédemment (section 7.2.1 page 10), le fil admet deux plans de symétrie, ce qui élimine les composantes suivant  $\vec{e}_\theta$  et suivant  $\vec{e}_z$ .

Ainsi :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r \quad (18)$$

Nous venons de simplifier considérablement l'expression de notre champ électrique !

2. **Champ élémentaire** : Nous découpons à présent le fil en de multiples segments élémentaires portant chacun la charge  $dq = \lambda dl$ , et cherchons le champ élémentaire créé par chaque portion :
- Le fil étant toujours dirigé suivant  $Oz$ , on a  $dl = dz$  et  $dq = \lambda dz$ . La portion  $dz$  crée le champ :

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u} \quad (19)$$

Or  $R=PM$  et  $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$ , donc :

$$d\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM} \cdot \vec{e}_r \quad (20)$$

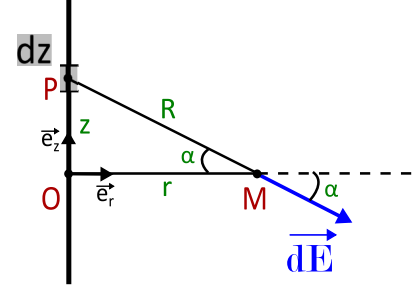


FIGURE 12 – Paramétrage du fil

Dans la configuration de la figure 13, trois paramètres ( $R$ ,  $z$  et  $\alpha$ ) jouent le même rôle, celui de situer le point  $P$  par rapport à l'origine du repère : nous allons en garder un seul, l'angle  $\alpha$ .

$\vec{PM} \cdot \vec{e}_r$  représente la projection de  $\vec{PM}$  sur l'axe dirigé par  $\vec{e}_r$ , donc :

$$\vec{PM} \cdot \vec{e}_r = r \quad (21)$$

On a aussi :

$$\cos \alpha = \frac{r}{R} \iff R = \frac{r}{\cos \alpha} \quad (22)$$

Et :

$$z = r \times \tan \alpha \quad (23)$$

$$dz = r \times d(\tan \alpha) \quad (24)$$

$$dz = r \times (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha \quad (25)$$

$$dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad (26)$$

L'équation (20) devient :

$$d\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r = \frac{\lambda \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \frac{r^3}{\cos^3 \alpha}} \times r = \frac{\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (27)$$

3. **Intégration** : Il suffit à présent de sommer de façon continue tous les champs élémentaires créés par les éléments infinitésimaux  $dl$  du fil infini. Les bornes d'intégration concerneront  $\alpha$  puisque c'est le paramètre que nous avons choisi de garder.

Afin de considérer un fil infini, nous devons intégrer  $\alpha$  de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$ . Mais comme la situation est symétrique de part et d'autre du point  $O$ , nous pouvons intégrer entre  $0$  et  $\pi/2$  et multiplier le champ obtenu par  $2$ .

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 E_r(r) &= \int_{fil} \frac{\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} \\
 &= 2 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \alpha]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Le champ électrique créé par un fil infini s'écrit :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r} \tag{29}$$

## 9 Théorème de Gauss

Ce théorème va permettre un calcul de champ plus aisé (à condition que les symétries de la distribution soient suffisante) : sans calcul d'intégrale !

Avant de l'utiliser, nous devons définir une nouvelle grandeur : le flux d'un champ.

### 9.1 Flux du champ électrique à travers une surface

Le flux du champ électrique en un point M de l'espace à travers la surface S est défini par :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \tag{30}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Phi : \text{flux du champ électrique à travers S exprimé en Volt fois mètre (V.m).} \\
 \vec{E} : \text{champ électrique en Volt par mètre (V.m}^{-1}\text{).} \\
 dS : \text{élément infinitésimal de la surface S en mètre carré (m}^2\text{).} \\
 \vec{n} : \text{vecteur unitaire normal à l'élément de surface dS, sans unité.}
 \end{array} \right.$$

En pratique, dans le théorème de Gauss, nous choisirons une **surface fermée** : une surface est dite fermée lorsqu'elle délimite un volume.

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$ , normale à la surface est alors orienté de l'intérieur vers l'extérieur du volume délimité par la surface. on l'écrira alors  $\vec{n}_{ext}$ .

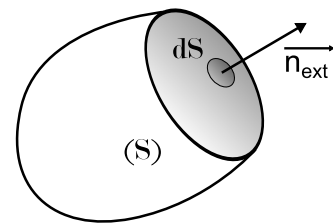


FIGURE 13 – Surface orientée

Aussi, pour indiquer que le flux du champ électrique sera calculé sur une surface fermée, on ajoute un rond au signe intégrale double.

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée s'écrit :

$$\Phi = \oiint_S d\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS \tag{31}$$

### 9.2 Enoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée S est proportionnel à la charge  $Q_{int}$  contenue dans le volume que délimite la surface S :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (32)$$

Avec :  $\begin{cases} Q_{int} : \text{charge électrique à l'intérieur du volume exprimée en Coulomb (C).} \\ \epsilon_0 : \text{permittivité du vide exprimée en SI : } \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} SI. \end{cases}$

### Remarques

La surface S fermée et donc le volume délimité par celle-ci seront choisis judicieusement en fonction de la distribution. La surface passera par M le point où l'on souhaite calculer l'expression du champ.

Il faudra également que l'on sache calculer la charge  $Q_{int}$  à l'intérieur du volume.

### 9.3 Application du théorème de Gauss au fil infini

1. On commence toujours par simplifier l'expression du champ électrique en éliminant coordonnées et composantes grâce aux **symétries et invariances**. Nous avons déjà fait ceci, on a toujours :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

2. Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut choisir une **surface de Gauss appropriée**. Nous allons prendre un cylindre centré sur le fil (qui présente d'ailleurs les mêmes invariances que la distribution. Comme la surface doit être finie, il faut attribuer une hauteur h arbitraire à celui-ci.

Le cylindre de Gauss passe par le point M au niveau duquel on veut calculer le champ électrique.

3. On doit maintenant **calculer le flux du champ électrique** à travers la surface de Gauss :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS \quad (33)$$

La surface de Gauss choisie est composée de trois portions de surface notées  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ . Il faut donc théoriquement calculer trois flux et les additionner :

$$\Phi_1 = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext 1} dS_1 \quad (34)$$

$$\Phi_2 = \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext 2} dS_2 \quad (35)$$

$$\Phi_3 = \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext 3} dS_3 \quad (36)$$

Mais  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont nuls car :

$$\vec{e}_r \cdot \vec{n}_{ext 1} = \vec{e}_r \cdot \vec{n}_{ext 2} = 0$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer  $\Phi_3$  :

$$\Phi = \Phi_3 = \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \oiint_S E_r(r) \vec{e}_r \cdot \vec{n}_{ext 3} dS \quad (37)$$

$$= E_r(r) \oiint_S dS = E_r(r) \times 2\pi r h \quad (38)$$

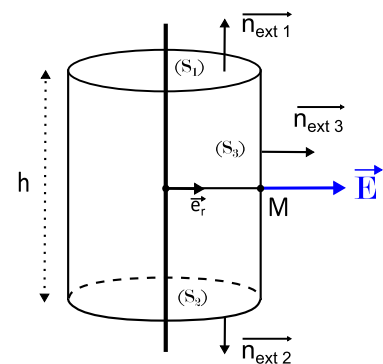


FIGURE 14 – Fil et théorème de Gauss

### Remarque

- Rappelons ici que le symbole intégrale double signifie que l'on somme des éléments infinitésimaux de surface  $dS$ .
- On peut, si on le souhaite, expliciter l'élément infinitésimal de surface  $dS$  : il s'agit d'une portion de surface d'un cylindre, c'est-à-dire  $r \times d\theta \times dz$ .  
Pour obtenir toute la surface  $S_3$ , il faut sommer ces éléments  $dS$  de 0 à  $2\pi$  d'une part et de  $-h/2$  à  $h/2$  d'autre part.

Ainsi :

$$\iint_{S_3} dS = \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r \times d\theta \times dz = r \times [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_{-h/2}^{h/2} = r \times 2\pi \times h$$

- Nous retrouvons bien le deuxième terme du résultat de l'équation (38) ; on peut aussi remarquer qu'il était bien possible de sortir le terme  $E_r(r)$  de la double intégration puisque celle-ci ne dépendait pas de  $r$  ( $r$  est constant puisqu'il définit la position du point  $M$  et donc celle de la surface de Gauss).
4. Il faut également calculer la **charge contenue à l'intérieur du volume** délimité par la surface de Gauss :
- Ici pas de surprise, le fil porte la densité linéique de charge  $\lambda$ , le cylindre est de hauteur  $h$  donc la charge contenue dans celui-ci est  $Q_{int} = \lambda \times h$ .
5. Enfin, nous appliquons le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \iff E_r(r) \times 2\pi r h &= \frac{\lambda \times h}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{39}$$

Finalement :

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{e}_r} \tag{40}$$

On retrouve donc l'expression de l'équation (29) page 13. On remarque que le paramètre arbitraire choisi  $h$ , qui représentait la hauteur du cylindre a bien disparu.

## 10 Références

- Pour l'histoire des sciences : [Document PHQ399 de David Sénéchal](#)
- "Electromagnétisme PCSI" - P.Krempf - Editions Bréal 2003 ;
- "Physique Cours compagnon PCSI" - T.Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009 ;
- "Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI" - JM.Brébec - Editions Hachette ;
- "Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique" - D.Cordier - Editions Dunod ;
- [http://perso.enscm-rennes.fr/jimmy.roussel/index.php?page=accueil\\_apprendre](http://perso.enscm-rennes.fr/jimmy.roussel/index.php?page=accueil_apprendre)