Examen terminal de mécanique

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Durée : 2 Heure 30 min.

Exercice : QCM sur l'oscillateur solide-ressort vertical

Une seule réponse par question doit être cochée. Une bonne réponse entraîne un gain de 0,5 point et toute mauvaise réponse entraîne une perte de 0,2 point. Il ne faut donc pas répondre au hasard.

⋆⋆⋆

Considérons un objet M de masse m, accroché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, se déplaçant sans frottement le long de l'axe vertical descendant Oz.

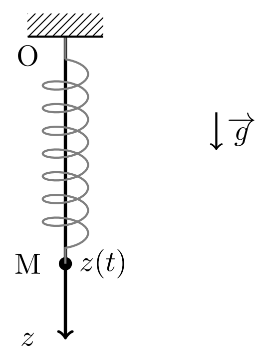

Figure 1 – Système solide-ressort vertical

1. Quelle est l'expression de la force de rappel qu'exerce le ressort sur la masse M ?

   ○ $\vec{F} = k\,z\,\vec{u_z}$ ○ $\vec{F} = k\,\ell_0\,z\,\vec{u_z}$

   ○ $\vec{F} = -k\,z\,\vec{u_z}$ ○ $\vec{F} = -k\,(z-\ell_0)\,\vec{u_z}$

2. Quelle est l'expression de la position d'équilibre de la masse M ?

   ○ $z_{\text{eq}} = \dfrac{mg + k\,\ell_0}{k}$ ○ $z_{\text{eq}} = mg + k\,\ell_0$

   ○ $z_{\text{eq}} = \dfrac{mg - k\,\ell_0}{g}$ ○ $z_{\text{eq}} = \dfrac{kg - m\,\ell_0}{k}$

3. L'équation différentielle qui décrit le mouvement de M est de la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2\, z_{\text{eq}} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On pose $u(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$. Que devient l'équation différentielle ?

- ◯ $\ddot{u} - \dfrac{u}{\omega_0^2} = 0$
- ◯ $\ddot{u} - \omega_0^2\, u = 0$
- ◯ $\ddot{u} + \omega_0^2\, u = 0$
- ◯ $\ddot{u} + \omega_0^2\, u = z_{\text{eq}}$

4. Les conditions initiales (à $t = 0$) sont les suivantes :
   - le point M est lancé depuis sa position d'équilibre ;
   - il a une vitesse $\overrightarrow{v}(t=0) = v_0\, \overrightarrow{u_z}$

Que vaut la solution de l'équation différentielle précédente ?

- ◯ $u(t) = v_0\, \cos(\omega_0\, t)$
- ◯ $u(t) = -\dfrac{v_0}{\omega_0}\, \cos\left(\omega_0\, t + \dfrac{\pi}{2}\right)$
- ◯ $u(t) = -\omega_0\, \cos(v_0\, t + \pi)$
- ◯ $u(t) = \dfrac{\omega_0^2}{1+v_0^2}\, \cos\left(\omega_0\, t + \dfrac{\pi}{2}\right)$
- ◯ $u(t) = \sqrt{\dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}\, e^{-\omega_0\, t} + \dfrac{\pi}{2}$

5. On cherche l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel $\overrightarrow{F}$ du ressort. Parmi les relations ci-dessous, laquelle permet de l'obtenir ?

- ◯ $\delta W = \overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{v} = \mathrm{d}E_P$
- ◯ $W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OM} = \mathrm{d}E_P$
- ◯ $\delta W = \overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_P$
- ◯ $\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_P$

Problème : quelques aspects de l'étude du Soleil et des étoiles

1. ***La troisième loi de Képler***

   On considère un satellite assimilé à un point matériel P de masse m en orbite autour d'un astre fixe, au point O et de masse M. On notera $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$ le vecteur position et G la constante universelle de gravitation.

   1.1. Exprimer la force exercée par l'astre fixe sur le satellite en fonction de G, M, m, $\overrightarrow{r}$ et de la distance r.

   1.2. Que vaut le moment en O de la force précédente ?

   1.3. Exprimer le moment cinétique en O du satellite en fonction de m, de son vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{r}$.

   1.4. En appliquant en O le théorème du moment cinétique, montrer que la trajectoire du satellite est plane.

   1.5. On se place dorénavant dans le plan de la trajectoire. On repère un point P par ses coordonnées polaires r et θ (cf. figure 2). La base polaire sera notée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du satellite en coordonnées polaires.
   Pour cette question et toutes les suivantes, on suppose que la trajectoire du satellite est un cercle de rayon r. Comment se simplifie l'expression de $\overrightarrow{v}$?

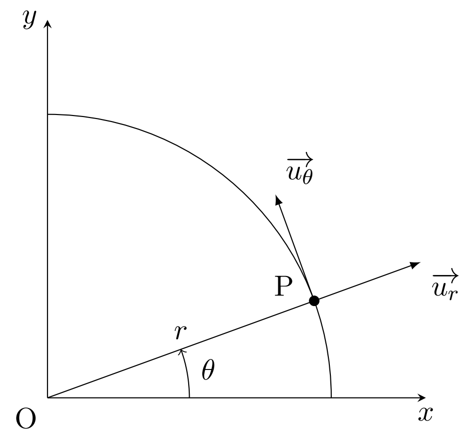

FIGURE 2

   1.6. Déterminer en coordonnées polaires l'expression du vecteur accélération du satellite.

   1.7. À partir de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite, montrer que la vitesse angulaire du satellite $\omega = \dot{\theta}$ est constante.

   1.8. Déduire aussi de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite que $r^3\,\dot{\theta}^2 = K$ où K est une constante que l'on exprimera en fonction des données.

   1.9. On appelle T la période du mouvement. Démontrer la relation suivante, appelée 3ème loi de Képler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{GM}$$

2. ***Le Satellite Hipparcos***

   Le satellite Hipparcos fut lancé le 8 août 1989 par une fusée Ariane IV. Ce projet de l'Agence spatiale européenne (ESA) avait notamment pour but de mesurer avec précision la distance de plus de 2,5 millions d'étoiles. Il était prévu à l'origine de placer Hipparcos sur une orbite géostationnaire. Cette partie se propose d'étudier les caractéristiques principales d'une telle orbite.

On se placera dans cette partie dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On rappelle que le référentiel géocentrique a pour origine le centre T de la Terre et que ses axes pointent dans trois directions fixes. Un satellite, assimilé à un point matériel M de masse m, est en orbite autour de la Terre, de masse M_T. On négligera l'influence sur le mouvement du satellite des astres autres que la Terre. Le satellite est géostationnaire c'est-à-dire qu'il reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre situé à l'équateur.

2.1. La période de l'orbite du satellite géostationnaire est égale à un jour sidéral dont la durée T_{sid} est de $23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,4\,\text{s}$ ($T_{\text{sid}} = 86164\,\text{s}$). Expliquer pourquoi cette valeur est légèrement inférieure (d'environ 4 minutes) à la durée du jour solaire T_{sol} de 24 heures.

2.2. En notant h l'altitude et R_T le rayon de la Terre et en utilisant la $3^{\text{ème}}$ loi de Képler (donnée à la question 1.9), calculer numériquement l'altitude du satellite géostationnaire.

Données : $T_{\text{sid}} = 86164\,\text{s}$; $R_{\text{T}} = 6378\,\text{km}$; $M_{\text{T}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

Le satellite Hipparcos devait être placé sur une telle orbite géostationnaire mais, en raison d'une panne de moteur au moment du lancement, il se retrouva sur une orbite très elliptique, ce qui ne l'empêcha pas de remplir correctement sa mission. Celle-ci s'est achevée le 17 août 1993.

3. *Sondes spatiales aux points de Lagrange*

Pour succéder à Hipparcos, l'Agence spatiale européenne développe le projet Gaia, qui est une sonde qui a été lancée le 19 décembre 2013. Elle doit observer plus d'un milliard d'objets et permettre ainsi de grands progrès dans la connaissance des étoiles, des galaxies et des planètes extrasolaires. L'orbite de Gaia sera complètement différente de celle d'Hipparcos puisque Gaia sera placée à l'un des points de Lagrange.

Les points de Lagrange sont des points particuliers où un objet de faible masse (comme une sonde) tournerait autour du Soleil avec exactement la même vitesse angulaire que la Terre. On ne s'intéressera qu'aux deux points de Lagrange L_1 et L_2 qui se situent tous deux sur la droite (ST), où S est le centre du Soleil et T celui de la Terre, L_1 étant entre S et T alors que L_2 se trouve plus loin de S que T (cf. figure 3). On appelle $\mathcal{R}_S$ le référentiel héliocentrique, supposé galiléen, d'origine S et dont les axes (SX, SY, SZ) ont des directions fixes. On définit un second référentiel, $\mathcal{R}$ (S, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$), tournant par rapport au précédent autour de l'axe SZ à la vitesse angulaire de la Terre, $\omega = \dot{\theta}$, constante, la Terre étant supposée avoir une orbite circulaire autour du Soleil.

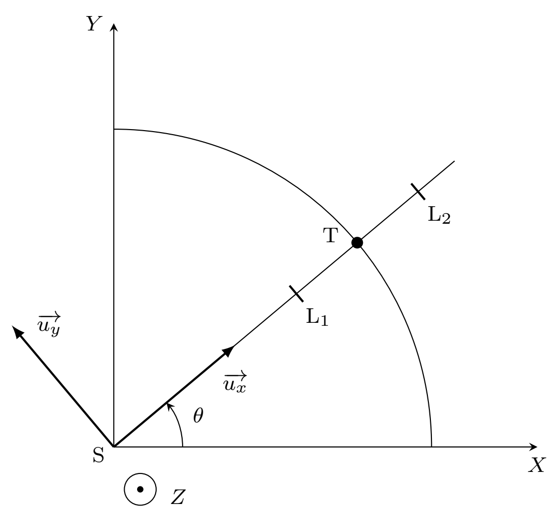

FIGURE 3

On suppose que la sonde se trouve au point de Lagrange L_2. On notera : $d = ST$, $\ell_2 = TL_2$.

3.1. Le référentiel $\mathcal{R}$ est-il galiléen ? Justifier.

3.2. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$. La sonde, de masse m, subit alors la force :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_T} + m\,(d + \ell_2)\,\omega^2\,\overrightarrow{u_x}$$

où $\overrightarrow{F_S}$ et $\overrightarrow{F_T}$ sont les forces gravitationnelles exercées respectivement par le Soleil et par la Terre sur la sonde. Expliquer l'origine du troisième terme $m\,(d + \ell_2)\,\omega^2\,\overrightarrow{u_x}$ (la démonstration de cette expression n'est pas demandée).

3.3. Donner l'expression de $\overrightarrow{F_T}$ en fonction de G, m, d, ℓ_2 et de la masse du Soleil M_S dans la base $(\overrightarrow{u_x}\ ,\ \overrightarrow{u_y}\ ,\ \overrightarrow{u_Z})$ de $\mathcal{R}$.

3.4. Donner l'expression de $\overrightarrow{F_S}$ en fonction de G, m, ℓ_2 et de la masse de la Terre M_T dans la base $(\overrightarrow{u_x}\ ,\ \overrightarrow{u_y}\ ,\ \overrightarrow{u_Z})$ de $\mathcal{R}$.

3.5. Écrire la condition d'équilibre de la sonde dans le référentiel $\mathcal{R}$ en ne faisant intervenir que G, M_S, M_T, d, ℓ_2 et la durée T_A de l'année terrestre (période de l'orbite de la Terre autour du Soleil).

3.6. En utilisant la $3^{\text{ème}}$ loi de Képler donnée à la question 1.9, et en notant $\epsilon = \dfrac{\ell_2}{d}$, montrer que cette condition peut s'écrire :

$$M_S\left(1 + \epsilon - \frac{1}{(1+\epsilon)^2}\right) - \frac{M_T}{\epsilon^2} = 0$$

3.7. On suppose $\epsilon \ll 1$. Montrer que l'équation précédente se simplifie en :

$$\epsilon^3 = \gamma\,\frac{M_T}{M_S}$$

Déterminer la constante sans dimension γ.
On rappelle que lorsque $\epsilon \ll 1$, on peut écrire $(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\,\epsilon$ (développement limité au second ordre).

3.8. Calculer numériquement ℓ_2.
Données : $d = 1{,}5 \times 10^8\,\mathrm{km}$; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$; $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

3.9. On admet que le point de Lagrange L_1 est le symétrique de L_2 par rapport à T c'est-à-dire que $TL_1 = TL_2$. Étant donné les objectifs de Gaia, dire, en justifiant la réponse, si les ingénieurs de l'ESA prévoient d'envoyer Gaia au point de Lagrange L_1 ou au point de Lagrange L_2.