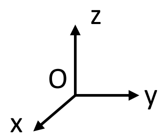
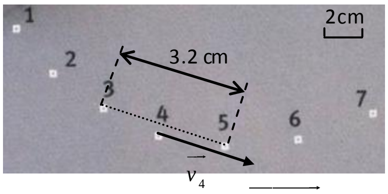
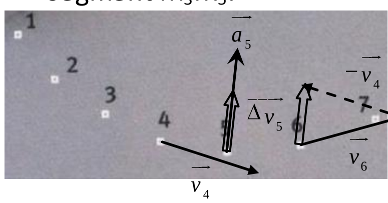
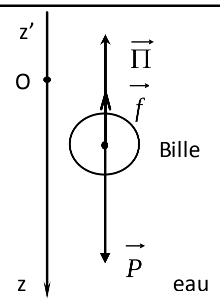
La mécanique de Newton

Points de cours	Explications ou utilisations
• Avant tout problème de mécanique, on : ✓ **Choisira le référentiel** adéquat, qui sera supposé galiléen. Ce référentiel est muni d'un repère d'espace (Ox, Oy, Oz le plus souvent), et d'une horloge pour mesurer le temps ✓ **Choisira le système** qui sera le solide ou l'ensemble de solides dont on veut étudier le mouvement ✓ **Fera le bilan des forces extérieures** exercées sur le système (un schéma est souhaitable)	• On veut étudier le mouvement d'un javelot. Le référentiel est le sol du stade d'athlétisme, référentiel considéré galiléen. On considère que le mouvement dans le système d'axe suivant :  Le système sera le javelot sur lequel s'exerce uniquement son poids
• La vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps : Si le mouvement s'effectue suivant l'axe Ox alors $\boxed{v = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad v = \dot{x}}$ Sur une trajectoire, on obtient la vitesse instantanée en calculant la vitesse moyenne entre deux instants rapprochés (voir ci-contre). • L'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse par rapport au temps : $\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ou} \quad a = \dot{v} = \ddot{x}}$ Sur une trajectoire, on obtient l'accélération instantanée en calculant l'accélération moyenne entre deux instants rapprochés (voir ci-contre).	 Intervalle de temps entre les positions : τ = 20 ms On veut tracer $\vec{v}_4 = \frac{\overrightarrow{M_3M_5}}{2\tau}$: ✓ On mesure le segment M_3M_5 sur la figure : 3.2cm ✓ On calcule $v_4 = \frac{3.2 \times 2}{2 \times 40 \times 10^{-3}} = 80\, cm.s^{-1}$ en tenant compte de l'échelle. ✓ On choisit une échelle de représentation des vitesses : 1 cm →0.40 m.s^{-1}, puis on trace le vecteur sur le point M_4 en étant parallèle au segment M_3M_5.  On veut tracer $\vec{a}_5$: ✓ Pour tracer un vecteur accélération, il faut tout d'abord tracer un vecteur variation de vitesse : $\overrightarrow{\Delta v_5} = \vec{v}_6 - \vec{v}_4$ ✓ On mesure le vecteur $\overrightarrow{\Delta v_5}$ Puis grâce à l'échelle de vitesse, on trouve sa valeur en m.s^{-1} ($\overrightarrow{\Delta v_5}$ mesure 1 cm donc

	Δv_5 =0.40 m.s^{-1}) ✓ On calcule : $a_5 = \frac{0.40}{2\times 40\times 10^{-3}} = 5\, m.s^{-2}$ On choisit une échelle d'accélération pour tracer ce vecteur (1 cm → 2.5 m.s^{-2}) ($\overrightarrow{a_5}$ a même sens, même direction que $\overrightarrow{\Delta v_5}$)
• Voici l'énoncé des trois lois de Newton : ✓ 1ère : principe d'inertie : tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui s'exercent sur lui se compensent (l' « état » du corps dépend des conditions initiales). ✓ 2ème : principe fondamentale de la dynamique : $\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}}$ **Très importante, c'est elle qui permettra d'avoir les équations du mouvement d'un système** (équation différentielle, équation de trajectoire, …) ✓ 3ème : principe d'action réaction : $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$	La première loi de Newton est incluse dans la seconde : si $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ alors $\vec{a} = \overrightarrow{cste}$ ce qui correspond à l'état de repos $\vec{a} = \vec{0}$ ou au mouvement rectiligne uniforme $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Chutes verticales de solide

Points de cours	Explications ou utilisations
• Les forces qui peuvent s'appliquer à un système en chute libre au voisinage de la Terre sont les suivantes : ✓ Le poids du système, égale à la force d'attraction de la Terre sur ce système : $\vec{P} = m \times \vec{g} = \overrightarrow{F_{T/S}} = G \times \frac{m \times M_T}{(R_T + h)^2}\vec{u}$ avec $\vec{u}$ vecteur unitaire dirigé du système vers le centre de la Terre $g = G \times \frac{M_T}{(RT + h)^2} = 9.80\, m.s^{-1}$ ou $N.kg^{-1}$ Rq : On pourra avoir besoin d 'exprimer la masse en fonction de la masse volumique du système : m=ρ×V ✓ La poussée d'archimède égale au poids du volume de fluide déplacé $\Pi = \rho_{fluide} \times V_{déplacé} \times g$ $\vec{\Pi}$ est dirigée en sens inverse du poids.	• Une bille chute dans un fluide : $\Sigma\vec{F} = m \times \vec{a}$ $m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$  On projette suivant l'axe z'Oz : $m \times \frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_f) \times g \times V - k \times v$ La bille étant totalement immergé, le même volume apparaît dans l'expression du poids et de la poussée d'archimède . • On peut exprimer à partir de cette équation différentielle la vitesse limite : Quand on l'a atteinte, dv/dt = 0 d'où : $m \times \frac{dv}{dt} = 0 = (\rho - \rho_f) \times g \times V - k \times v_{lim}$

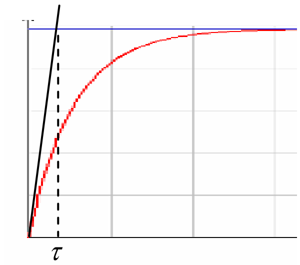
- ✓ La force de frottement fluide :

  $f = k \times v$ ou $f = k \times v^2$

  Cette force est dirigée en sens inverse du mouvement.

Ainsi $v_{lim} = \dfrac{(\rho - \rho_f) \times g \times V}{k}$

- On peut obtenir le temps caractéristique de la chute par une méthode graphique :



- La méthode d'Euler permet d'obtenir par une succession de calculs identique, l'allure d'une fonction à partir de l'équation différentielle :
- ✓ Pour équation différentielle de ce type :

$$\frac{dv}{dt} = av + b$$

- ✓ Si on prend un δt suffisamment petit on peut écrire :

$$\frac{\delta v}{\delta t} = av + b$$

- ✓ On peut donc calculer la variation de vitesse δv pendant le temps δt :

$$\delta v = \ av + b \ \times \delta t$$

- ✓ Ainsi si on connaît a, b et v0, on peut choisir δt pour calculer :

$$v_1 = v_0 + \delta v = v_0 + \ av_0 + b \ \times \delta t$$

$$v_2 = v_1 + \delta v = v_1 + \ av_1 + b \ \times \delta t$$

•••

- Avec cette méthode d'Euler, on obtient les valeurs de v_0, v_1, v_2, …, v_n pour des temps t_0, t_1, t_2, …, t_n. On peut donc tracer une allure de v=f(t) avec toutes ces valeurs.

- L'intérêt de la méthode d'Euler et de pouvoir tracer différentes allures de v=f(t) : on peut ainsi voir les influences des masses volumique (bille et fluide), de l'expression de la force de frottements fluide …

- Pour une chute verticale sans frottement, l'accélération est égale à l'accélération de la pesanteur : $\vec{a} = \vec{g}$

Si on projette une nouvelle fois sur un axe vertical Oz dirigé vers le bas :

$a = g$; comme $a = \dfrac{dv}{dt}$, en intégrant :

$v(t) = gt + cste$. Si $v(t = 0) = 0$ alors $cste = 0$

Comme $v = \dfrac{dz}{dt}$, en intégrant :

$z(t) = 1/2 \times g \times t^2 + cste'$. Si $z(t = 0) = 0$ alors $cste' = 0$

Finalement :

$$\boxed{a = g \quad ; \quad v(t) = g \times t \quad ; \quad z(t) = 1/2 \times g \times t^2}$$

- On retrouve ici le fait que l'accélération d'un système en chute libre (qui n'est soumis qu'à son poids) est indépendante de sa masse (un marteau et une plume tomberait de la même hauteur en même temps)

- On peut obtenir la valeur e la vitesse lors de l'arrivée au sol :

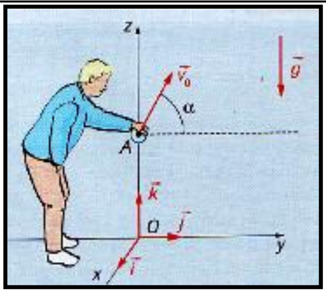
Pour une altitude de chute h :

$$h = 1/2 \times g \times t^2 \quad d'où \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = g \times t = \sqrt{2gh}$$

Mouvement d'un projectile

Points de cours



- Référentiel : les pieds immobiles du joueur, référentiel terrestre supposé galiléen.
- Système : la boule de pétanque
- Force : le poids de la boule
- 2ème loi de Newton : $\vec{a} = \vec{g}$
  On va projeter cette relation sur les 3 axes :

Sur Ox	Sur Oy	Sur Oz
$a_x = 0$	$a_y = 0$	$a_z = -g$
d'où en primitivant : $v_x = cste_1$ CI : $v_x(t=0) = 0 = cste_1$ d'où $\boxed{v_x(t) = 0}$	d'où en primitivant : $v_y = cste_2$ CI : $v_y(t=0) = v_0 \times \cos\alpha = cste_2$ d'où $\boxed{v_y(t) = v_0 \times \cos\alpha}$	d'où en primitivant : $v_z = -g \times t + cste_3$ CI : $v_z(t=0) = cste_3 = v_0 \times \sin\alpha$ d'où $\boxed{v_z(t) = -g \times t + v_0 \times \sin\alpha}$
D'où en primitivant : $x = cste_4 = x(t=0) = 0$ d'où $\boxed{x(t)=0}$	D'où en primitivant : $y = v_0 \times \cos\alpha \times t + cste_5$ CI : $y(t=0)=0=cste_5$ d'où $\boxed{y(t) = v_0 \times \cos\alpha \times t \quad (1)}$	D'où en primitivant : $z = -1/2 \times g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + cste_6$ CI : $z(t=0) = OA = cste_6$ d'où $\boxed{z(t) = -1/2 \times g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + OA \quad (2)}$

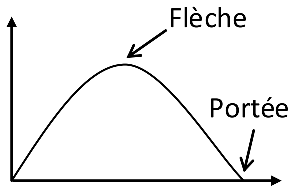
Il n'y a pas de mouvement suivant l'axe Ox, **le mouvement est plan, dans le plan yOz.**

Grâce à ces deux équations, on peut obtenir **l'équation dela trajectoire** :

(1) Nous donne $t = \dfrac{y}{v_0 \times \cos\alpha}$

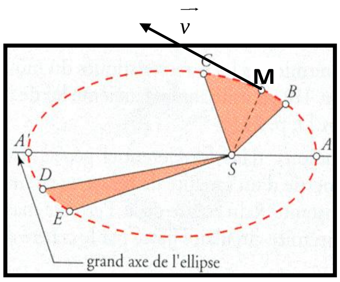
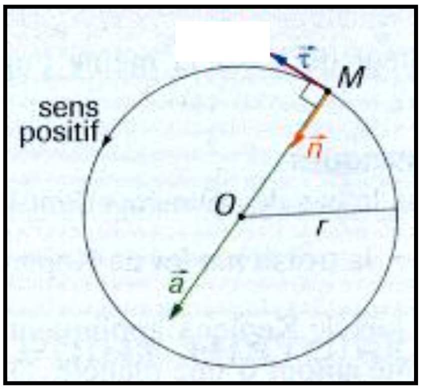
On remplace dans (2) : $\boxed{z(y) = 1/2 \times g \times \dfrac{t^2}{v_0{}^2 \times \cos^2\alpha} + v_0 \times \tan\alpha \times y + OA}$

2 autres notions sont à connaître :



- On appelle la **flèche** la position la plus haute de la trajectoire : dans cette position, l'altitude du projectile est maximale, sa vitesse verticale est nulle.
- On appelle la **portée** la distance maximale horizontale atteinte par le projectile : dans cette position, la position verticale du projectile est nulle.

Planètes et satellites

Points de cours	Explications ou utilisations
• Dans ce thème les référentiels à utiliser sont : ✓ Le référentiel **héliocentrique** pour étudier le mouvement des **planètes** autour du soleil ✓ Le référentiel **géocentrique** pour étudier le mouvement du **satellite** naturel ou des **satellites** artificiels de la Terre	Attention, dans le référentiel géocentrique, la Terre a un mouvement de rotation propre (elle a un mouvement de révolution dans le référentiel héliocentrique.
• Voici l'énoncé des trois lois de Kepler (pour une planète dans le référentiel héliocentrique) : ✓ Dans le référentiel héliocentrique, **le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.** ✓ Le rayon vecteur SM qui relie la planète M au soleil S **balaie des aires égales en des temps égaux.** ✓ $\frac{T^2}{a^3}$ = constante	• Loi des aires :  Les deux aires grisées sont égales : la planète va plus vite entre B et C qu'entre D et E • La troisième loi est peut-être la plus importante à retenir car c'est elle qui donne lieu à des calculs dans les exercices.
• Mouvement circulaire uniforme :  Lorsque l'on travaille sur celui-ci, on utilise une base de vecteurs qui tourne en même temps que le système autour du point attracteur. Il y a le vecteur normal : $\vec n$ Et le vecteur tangent : $\vec\tau$ Dans ce mouvement : ✓ **la vitesse est dirigée uniquement suivant le vecteur** $\vec\tau$ ✓ **L'accélération est dirigée uniquement suivant le vecteur** $\vec n$ ✓ On sait aussi que $a = \frac{v^2}{r}$	• Appliquons la 2ème loi de newton à un satellite dans le référentiel géocentrique : $m\times\vec a = \sum \vec F_{ext} = \vec F_{T/sat} = G\times\frac{m\times M_T}{(R_T+h)^2}\vec u_{satT}$ *On peut noter $r=R_T+h$* En projection sur le vecteur normal, on obtient : $a = G\times\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$ ✓ Comme $a=\frac{v^2}{r}$ on obtient alors la vitesse : $v=\sqrt{\frac{G\times M_T}{R_T+h}}$ ✓ Comme $T=\frac{2\pi r}{v}$ on a aussi la période de révolution : $T = 2\pi\times\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$ ✓ On retrouve alors la 3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{R_T+h^{3}} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = cste$ Avec une constante qui ne dépend que de l'astre attracteur, ici la Terre. **Attention : pour toutes ces relations, utilisez les unités du système international.**

- Un satellite est géostationnaire s'il est toujours à la verticale d'un même lieu de la Terre. Pour cela, ile satellite doit respecter trois règles :
  - ✓ Il doit décrire **mouvement circulaire uniforme** dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles terrestres ; Le plan de son orbite doit être celui de l'équateur.
  - ✓ Il doit tourner dans le même sens que la Terre autour d'elle-même.
  - ✓ Il doit tourner dans le même temps, soit 24H.

- Calculons l'altitude à laquelle se situe un satellite géostationnaire :

On part de $\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = cste$

On calcule :

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times G \times M_T}{4\pi^2}} = 42.2 \times 10^6\, m$$

Puis

$h = 42.2\times10^6 - 6400 = 36\,000$ km environ

Le système solide-ressort

Points de cours	Explications ou utilisations

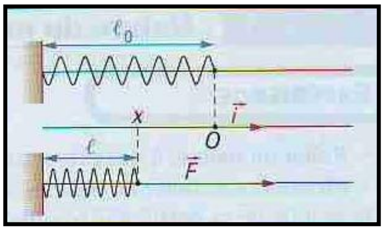
Qu'un ressort soit comprimé ou étiré la force de rappel s'exprime par :

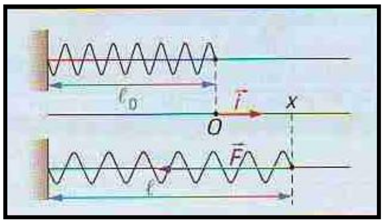
$$\boxed{\vec{F} = -k\, x\, \vec{i}}$$

Où x est l'allongement du ressort, grandeur algébrique (qui peut être soit <0 soit >0)

$$x = l - l_0$$

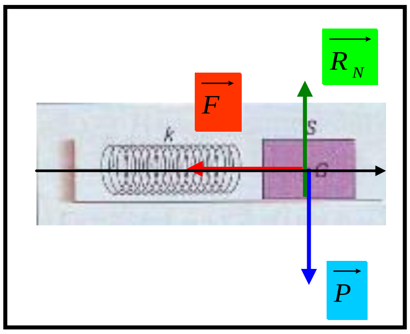
Où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire qui donne l'orientation de l'axe Ox





- **Etudions le mouvement d'une masse** accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal. Cette masse se déplace sans frottements et toujours suivant la direction Ox (référentiel du laboratoire, supposé galiléen) :
  - ✓ Appliquons la deuxième loi de Newton :

$$m \times \vec{a} = \sum \vec{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F}$$



- ✓ On projette sur un axe horizontal Ox :

$$m \times \ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

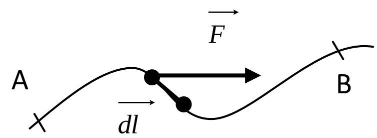
On obtient l'équation différentielle du mouvement de la masse.

- **Vérifions** que $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ avec $\omega_0{}^2 = k/m$ est **solution de cette équation** différentielle.

On dérive x(t) une fois : $\dot{x} = -x_m\, \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

On dérive une deuxième fois : $\ddot{x} = -x_m \omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ On remplace dans le premier membre de l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = -x_m \omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \omega_0{}^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$ La solution proposée vérifie l'équation différentielle. • Comment trouver les **valeurs des constantes** x_m et φ_0 : Il faut utiliser les **conditions initiales** : par exemple x(t=0) = 2 m et v(t=0) = 0. On obtient deux équation avec deux inconnues : $x(t=0) = x_m \cos(\varphi_0) = 2 \quad (1)$ $\dot{x}(t=0) = -\omega_0 x_m \sin(\varphi_0) = 0 \quad (2)$ L'équation (2) nous donne $\boxed{\varphi_0 = 0}$ (car ω_0 et x_m ne peuvent pas être nulles) On remplace dans l'équation (1) et on trouve $\boxed{x_m = 2}$
• La période des oscillations a pour expression : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Aspects énergétiques

Points de cours	Explications ou utilisations
• Travail élémentaire d'une force : $\delta W = \vec{F} \bullet \vec{dl}$ Si l'angle entre les deux vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{dl}$ est noté θ : $\delta W = F \times dl \times \cos\theta$ • A partir de ce travail élémentaire, on peut obtenir le travail de n'importe quelle force sur n'importe quel déplacement : Pour cela il suffit d'intégrer le travail élémentaire précédent sur le déplacement voulu : $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dl}$	
• **Force de tension** : Cette force, force extérieure appliquée à l'extrémité d'un ressort appelée force de tension, est l'opposée de la force de rappel du ressort : $\boxed{\vec{T} = kx\vec{i}}$ • **Travail de la force de tension** : Cette force permet de faire passer le ressort d'un allongement x_1 à un allongement x_2. Calculons son travail : $W_{x_1x_2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} \delta W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{T} \bullet \vec{dl} = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}k(x_2{}^2 - x_1{}^2)$	• Le ressort s'étire suivant une diection, généralement celle de l'axe Ox. Ainsi le déplacement élémentaire est : $\vec{dl} = dx \times \vec{i}$ • Il faut passer ici par le travail élémentaire car la force de tension n'est pas constante le long du déplacement de x_1 à x_2

- **Energie cinétique :**

  $\boxed{E_C = ½\ m\ v}$ avec E_c : énergie cinétique en joules (J)
  m : masse du solide en kg
  v : vitesse du solide en $m.s^{-1}$

- **Théorème de l'énergie cinétique :**

  $$\boxed{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \Sigma\ W_{AB}(\overrightarrow{F_{ext}})}$$

- **Energie potentielle de pesanteur :**

  $$\boxed{E_{pp} = m\ g\ z}$$

  E_{pp} : énergie potentielle de pesanteur (J)
  m : masse du solide (kg)
  g : valeur de la pesanteur ($N.kg^{-1}$)
  z : altitude du centre de gravité du solide (m)

- **Energie potentielle élastique :**

  $$\boxed{E_{Pél} = \frac{1}{2} k\,x^2}$$

  $E_{Pél}$: énergie potentielle élastique (J)
  k : constante de raideur du ressort ($N.m^{-1}$)
  x : Allongement algébrique du ressort (m)

- **Energie mécanique :**

  $E_m = E_C + E_{pp}$ ou $E_m = E_C + E_{pél}$
  Ex : projectile Ex : système solide-ressort

On peut faire pas mal de choses avec ce théorème, par exemple retrouver la **conservation de l'énergie mécanique quand il n'y a pas de frottements**.

En effet, en calculant le travail du poids, on accède à l'énergie potentielle. Et dans le théorème de l'énergie cinétique, on a l'énergie cinétique !