Chapitre 10 : Mouvement de chute verticale d'un solide

Connaissances et savoir-faire exigibles :

(1) Définir un champ de pesanteur uniforme.
(2) Connaître les caractéristiques de la poussée d'Archimède.
(3) Appliquer la deuxième loi de Newton à un corps en chute verticale dans un fluide et établir l'équation différentielle du mouvement la force de frottement étant donnée. (**Voir TPφn°7**)
(4) Connaître le principe de la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle. (**Voir TPφn°7**)
(5) Définir une chute libre, établir son équation différentielle et la résoudre.
(6) Définir un mouvement rectiligne uniformément accéléré.
(7) Savoir exploiter des reproductions d'écrans d'ordinateur (lors de l'utilisation d'un tableur grapheur) correspondant à des enregistrements expérimentaux. (**Exercices**)
(8) Savoir exploiter des courbes v_G = f(t) pour : (**Voir TPφn°7**)
   - ✓ reconnaître le régime initial et/ou le régime asymptotique.
   - ✓ évaluer le temps caractéristique correspondant au passage d'un régime à l'autre.
   - ✓ déterminer la vitesse limite.

(9) Dans le cas de la résolution par méthode itérative de l'équation différentielle, discuter la pertinence des courbes obtenues par rapport aux résultats expérimentaux (choix du pas de résolution, modèle proposé pour la force de frottement). (**Voir TPφn°7**)

Introduction :

Connaître les lois de Newton est bien, mais savoir comment s'en servir c'est mieux : le but de ce chapitre est de voir l'utilisation des lois de Newton en vu de décrire des mouvements simples et les traduire par des équations.

I Chute verticale d'un solide avec frottements :

Voilà le problème qui se pose : nous voulons étudier la façon dont se comporte une bille **qui tombe au fond d'une piscine** : quelles sont les **caractéristiques de son mouvement** entre le moment où elle rentre dans l'eau verticalement (à vitesse nulle par exemple), et le moment où elle touche le fond de la piscine. On va bien sûr **appliquer les lois de Newton :**

1) Le référentiel :

Pour pouvoir appliquer les lois de Newton, il faut choisir un **référentiel galiléen**. On peut prendre un référentiel terrestre comme la **margelle de la piscine**, objet lié à la terre considéré comme galiléen pendant le temps de chute de la bille.

2) Le système étudié :

Bien sûr il s'agit de la **bille** dont on veut étudier le mouvement.

3) Les forces appliquées :

Question élèves : Quelles sont les forces qui s'applique sur la bille ?

Poids, poussée d'Archimède, force de frottement fluide

a. Qu'est-ce que le poids ? force et champ de pesanteur :

On a vu en première qu'à l'échelle macroscopique, l'interaction fondamentale qui régissait le monde l'interaction gravitationnelle.

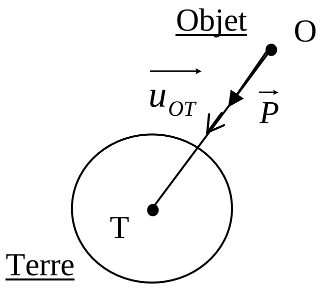
- <u>Force de pesanteur ou poids :</u>

Définition : On appelle poids d'un objet ponctuel, situé en un point O donné, la force $\vec{P}$ s'opposant à la tension du fil qui maintient cet objet ponctuel au repos par rapport au solide Terre, pris comme référentiel.

Lorsqu'un objet est proche de la terre, on dit qu'ils sont soumis à une **force de pesanteur nommée** $\vec{P}$ et donnée par l'expression :

$$\vec{P} = m_O \times \frac{G \times m_T}{(R_T + z)^2} \times \overrightarrow{u_{OT}} = m_O \times \vec{g}$$

- m_O : masse l'objet en kg
- G : constante gravitationnelle en $N.m^2.kg^{-2}$
- m_T : masse de la terre en kg
- R_T : rayon de la terre en m
- z : altitude éventuelle de l'objet en m
- $\overrightarrow{u_{OT}}$: vecteur unitaire dirigé de O vers T



Cette force est caractérisée par :

- ✓ Son **point d'application** situé au **centre d'inertie** de l'objet.
- ✓ Sa **direction** qui est une **droite reliant le centre de la terre et le centre d'inertie** de l'objet.
- ✓ Son **sens** : la force est **dirigée vers le centre de la terre**.
- ✓ Sa **valeur** donné par **P = mg** (valeur de g : voir ci-dessous)

Remarque prof : différence entre pesanteur et gravitation :
On parle de pesanteur quand on étudie un objet en interaction avec la terre, on parle de gravitation la loi universelle qui dit que deux objets de masse m_1 et m_2 s'attire irrémédiablement selon la force

$$F_{1/2} = F_{2/1} = Gm_1m_2/r_{12}^2$$

- <u>Champ de pesanteur</u> (1):

Comme tout objet au voisinage de la terre sera soumis à cette force de pesanteur, on dit que **la terre crée un champ de pesanteur** autour d'elle, **défini par le vecteur** $\vec{g}$

Si on reprend l'expression de g : $\vec{g} = \frac{G \times m_T}{(R_T + z)^2} \times \overrightarrow{u_{OT}}$

On se rend compte que sa norme peut dépendre de deux paramètres principaux :

- ✓ L'altitude z de l'objet par rapport à la surface de la terre.
- ✓ La latitude de sa position, car la terre n'est pas tout à fait sphérique (aplatissement aux pôles) et donc le rayon terrestre varie.

On peut donc avoir **g = 9.810 N.kg^{-1} à Paris** alors que l'on aura **g = 9.780 N.kg^{-1} à l'équateur**.

Lorsque l'on s'intéresse a des chutes « de laboratoire », la latitude du laboratoire ne varie pas, la variation de l'altitude de l'objet est négligeable, le vecteur g garde les mêmes caractéristiques en tout point du laboratoire, on dit alors que l'on a à faire à un <u>champ de pesanteur uniforme</u>.

b. <u>Qu'est-ce que la poussée d'Archimède</u> (2) ?

Lorsque qu'un **corps est immergé dans un fluide**, il subit de la part du fluide des **forces pressantes** qui s'exercent en chaque point du solide. Celles-ci sont perpendiculaires aux surfaces de contact entre le fluide et le solide et dirigées vers lui.
La poussée d'Archimède est la résultante de ces forces qui n'est donc pas nulle.

Elle a les caractéristiques suivantes :

- ✓ Son **point d'application** est le **centre de gravité du volume du solide immergé** (le solide n'est pas forcément entièrement immergé).
- ✓ Sa **direction** est **verticale**.
- ✓ Son **sens** est **vers le haut.**
- ✓ Sa valeur est égale au poids du volume du solide immergé :

$$\boxed{\Pi = \rho_{fluide} * V_{déplacé} * g}$$

- Π : poussée d'Archimède (N)
- ρ_{fluide} : masse volumique du fluide déplacé (kg/m^3)
- $V_{déplacé}$: volume du fluide déplacé (m^3)
- g : intensité de la pesanteur ($N.kg^{-1}$)

La poussée d'Archimède exercée par l'air sur le solide (l'air est un fluide) sera généralement négligé.

c. Qu'est-ce que la force de frottement fluide ?

Là aussi il s'agit **d'actions de contact** entre le fluide et le solide qui se manifeste à partir du moment ou le solide est en mouvement.

Cette **force est liée à la vitesse**, elle **a toujours même direction que celle-ci mais un sens opposé** :

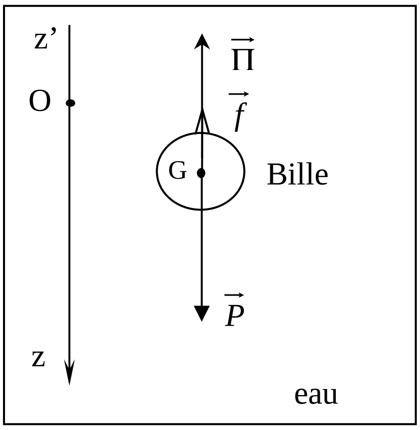
- ✓ Si la **vitesse** est **faible** (qq $cm.s^{-1}$) alors la force a pour valeur **f = k*v**.
- ✓ Si la **vitesse** est **plus importante** (qq $m.s^{-1}$) alors on a une valeur correspondant à **f' = k'v²**

Le **facteur k dépend** de tout ce qui peut faire varier f, c'est à dire la **forme de l'objet**, ça **taille**, **l'aspect de sa surface** ou encore la **nature du fluide**.

4) Application de la deuxième loi de Newton et équation différentielle du mouvement (3) :

La deuxième loi de Newton nous dit : $\Sigma\vec{F} = m\times\vec{a_G} = m\times\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$

Cette **relation est vectorielle**, pour passer en valeur, il nous faut **projeter cette relation sur un axe**.



Le mouvement se faisant exclusivement verticalement, il paraît judicieux de choisir l'axe z'Oz, vertical vers le bas.

La deuxième loi de Newton peut donc s'écrire :

$$m\times\frac{dv_z}{dt} = P - \Pi - f = \rho\times V\times g - \rho'\times V\times g - k\times v_z$$

d'où

$$\boxed{m\times\frac{dv_z}{dt} = (\rho - \rho')\times V\times g - k\times v_z}$$

Rq : La bille étant totalement immergée dans le fluide eau, les volumes qui apparaissent dans l'expression de la poussée d'Archimède et dans l'expression du poids sont les mêmes.

5) Vitesse limite et temps caractéristique :

➢ Vitesse limite :

Regardons de plus près l'équation différentielle, on voit que si le **membre de droite est nul**, alors la **dérivée de la vitesse par rapport au temps est nulle**, donc **v ne varie plus** :

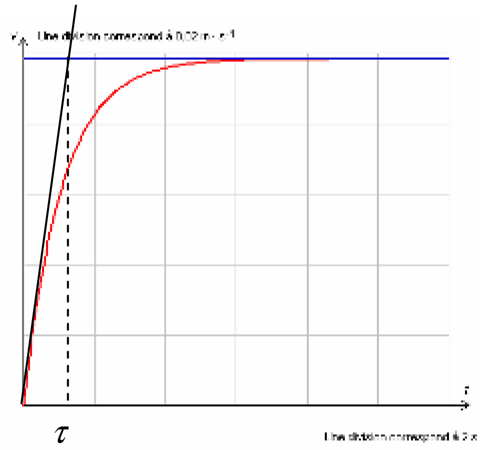
On dit alors que l'on a atteint une vitesse limite définie par :

$$(\rho - \rho')\times V\times g - k\times v_{z\,lim} = 0 \text{ d'où } \boxed{v_{z\,lim} = \frac{(\rho - \rho')\times V\times g}{k}}$$

- Temps caractéristique :

Toujours d'après l'équation différentielle on peut commenter l'évolution de la vitesse :

- ✓ Au **début**, la vitesse étant faible, dv_z/dt est grande et la **vitesse varie beaucoup**.
- ✓ **Au fur et à mesure** que le temps s'écoule **la force de frottement fluide augmente jusqu'à ce que l'on atteigne la vitesse limite** qui comme son nom l'indique constitue la limite de la vitesse quand t tend vers l'infini.
- ✓ La forme de la courbe v = f(t) peut être tracer :



Comme toutes les courbes qui avaient cette forme dans les précédents chapitres, on peut **définir un temps caractéristique :**

- ✓ On dit qu'**au bout de ce temps on passe du régime transitoire au régime permanent**.
- ✓ Ce temps est obtenue en regardant **l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à l'origine à v = f(t) et l'asymptote v = vlim**.

- Influences de paramètres sur v_{lim} et τ : *Simulation Hatier*

En changeant le fluide dans lequel la bille chute, on peut observer l'influence de la viscosité du fluide sur la valeur de la vitesse limite et celle du temps caractéristique. (Laisser les paramètres de bases ; penser à cliquer sur affichage > vitesse ; modifier les valeurs de η et m_{bille})

6) Résolution de l'équation différentielle : la méthode d'Euler [4] :

- Pour résoudre cette équation différentielle, nous allons utiliser une **méthode numérique** qui va nous permettre d'avoir des **valeurs approchées de la fonction v_G(t) et donc sa représentation graphique**.

Ecrivons plus simplement l'équation différentielle obtenue : $\frac{dv}{dt} = av + b$

Si on choisit δt suffisamment petit, on peut écrire : $\frac{\delta v}{\delta t} = av + b$ et $\delta v = (av + b) \times \delta t$

- Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut :
  - ✓ **Connaître les valeurs de a et b** (c'est le cas ici).
  - ✓ **Connaître les conditions initiales** (ici : v(t=0) = 0)
  - ✓ **Choisir** ce que l'on appelle **le pas de calcul**, δt.

- Comment procéder ?
  - ✓ A la date $t_0 = 0$, $v_0 = 0$.
  - ✓ A la date $t_1 = t_0 + \delta t$, $v_1 = v_0 + \delta v = v_0 + (a \times v_0 + b) \times \delta t$

    On connaît toutes les valeurs dont on a besoin pour calculer v_1.
  - ✓ On procède de la même manière pour v_2, v_3 … bien entendu, **on utilisera un tableur pour répéter ces calculs.**

- Avec les valeur obtenues de v_0 à v_n, pour les dates t_0 à t_n, on tracera $v_i = f(t_i)$ ce qui nous donnera la représentation graphique de la fonction $v_G = f(t)$

Cette méthode est appelée méthode numérique itérative, car on répète n fois les mêmes calculs. Si on veut améliorer la précisions des calculs, il suffit de choisir un pas de calcul δt plus petit.

- Remarques :
  - ✓ **Cette méthode permet de tester un modèle pour la force de frottement**, si la méthode d'Euler donne une allure pour v_G(t) proche de celle obtenue expérimentalement, on peut valider le modèle.
  - ✓ C'est cette méthode qu'utilise les logiciels de simulation pour modéliser des grandeurs dont on veut connaître les représentations graphiques.

II Chute vertical d'un solide sans frottements [5] :

Nouveau problème :
On laisse tomber en chute libre une bille du haut du toit d'une maison, sans vitesse initiale. Quel est le mouvement de la bille ?

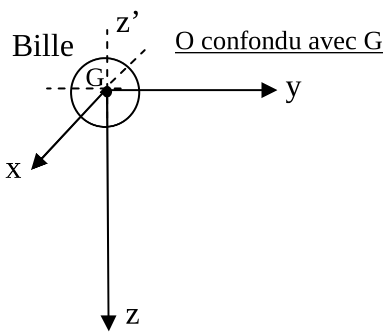
1) Qu'est-ce qu'une chute libre ?

Un solide est en chute libre lorsque l'on étudie son **mouvement par rapport à un référentiel terrestre** et qu'il est **soumis qu'à la force de pesanteur** (ce n'est vrai que dans le vide).

2) Equation différentielle du mouvement :

Il faut encore une fois appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie du solide :

$$\Sigma\vec{F} = m\times\vec{a_G} \Leftrightarrow \vec{P} = m\times\vec{g} = m\times\vec{a_G} = m\times\frac{d\vec{v_G}}{dt}$$



On peut projeter cette relation sur l'axe z'Oz :

$$g = a_{Gz} = \frac{dv_{Gz}}{dt}$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{dv_{Gz}}{dt} = g}$$

Conséquences :

- ✓ **L'accélération du solide suivant l'axe vertical est constante** car elle est égale à l'intensité du champ de pesanteur qui est constant puisque le champ est uniforme.
- ✓ L'accélération du solide a étant égale à l'intensité de la pesanteur g, on dit qu'il y a **identité entre la masse inertielle** (celle qui intervient dans la $2^{ème}$ loi de Newton) **et masse gravitationnelle** (celle qui intervient dans la force de pesanteur ou de gravitation).
- ✓ Ceci explique **pourquoi l'accélération d'un solide en chute libre est indépendante de la masse du solide.**

3) Résolution de l'équation différentielle :

On s'intéresse toujours au point G du solide, nous n'indicerons plus les différents paramètres pour ne pas alourdir les équations.

➢ Mouvement à une dimension :

Le vecteur $\vec{g}$ n'étant dirigée que dans une seule direction, le mouvement se fera dans une seule direction (celle de l'axe z'Oz). En effet :

- ✓ On a $\frac{dv_x}{dt} = 0$ d'où $v_x = cte = v_x(t=0) = 0$ or $v_x = \frac{dx}{dt} = 0$ d'où $x = cte = x(t=0) = 0$
- ✓ Le même raisonnement peut-être fait dans la direction de l'axe y'Oy

➢ Quel est donc le mouvement dans la direction considérée [6] ?

- ✓ $\frac{dv_z}{dt} = g$ donc $v_z(t) = g\,t + v_z(0)$ ($v_z(t)$ est une **primitive** de $a_z(t)$)
- ✓ $v_z(t) = \frac{dz}{dt} = g\,t + v_z(0)$ donc $z(t) = 1/2\times g\times t^2 + v_z(0)\times t + z(0)$

Exercices n°14,17,19 et 20 p 233/234

Donc si comme nous l'avions énoncé v(0) = 0 :
$v_z(t) = g\,t$: la **vitesse augmente proportionnellement au temps : c'est la définition d'un mouvement uniformément accéléré.**

A l'aide de l'équation différentielle du mouvement et des conditions initiales, nous avons pu obtenir l'évolution de la position et de la vitesse de la bille au cours du temps : on connaît donc son mouvement.