Chapitre 11 : Mouvement de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme

Connaissances et savoir-faire exigibles :

(1) Appliquer la deuxième loi de Newton à un projectile dans un champ de pesanteur uniforme.
(2) Montrer que le mouvement est plan.
(3) Établir l'équation de la trajectoire à partir des équations horaires paramétriques.
(4) Savoir exploiter un document expérimental reproduisant la trajectoire d'un projectile : tracer des vecteurs vitesse et accélération, déterminer les caractéristiques du vecteur accélération, trouver les conditions initiales. (**Voir TPφn°8**)
Savoir-faire expérimentaux : (**Voir TPφn°8**)
(5) Savoir enregistrer expérimentalement la trajectoire d'un projectile et exploiter le document obtenu.

Introduction :

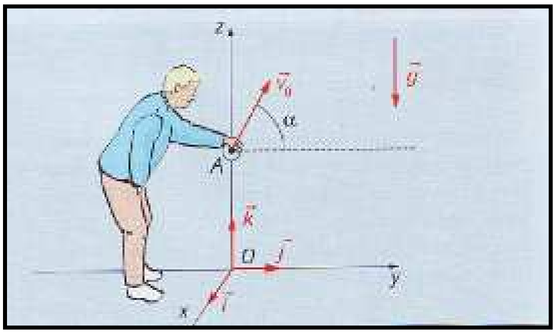
Dans le **chapitre précédent**, nous avons appris à utiliser la deuxième loi de newton pour décrire le **mouvement à une dimension** d'un solide.
Ici nous allons étudier, toujours avec cette même loi, le **mouvement à deux dimensions** d'un solide qui se meut dans le **champ de pesanteur uniforme**.

Problème :

Un joueur de pétanque veut pointer sa boule pour l'amener près du cochonnet. Il veut l'envoyer à une distance de 6m, mais il ne doit pas dépasser une hauteur de 3m du sol, car un arbre peut gêner sa progression.
La main du joueur lâche la boule à une hauteur de 1.2m du sol avec un angle de 40°.
Est-ce possible ?

Résolution :

1) Schéma de la situation :



- **On cherche donc à connaître v_0** afin de réaliser les conditions :
  $z_{max} < 3m$ et $y_{max} = 5m$.
- On sait que $OA = z(t = 0) = z_0 = 1.2$ m
  $x(t = 0) = 0$
  $y(t = 0) = 0$

2) Les bases à définir avant tout problème de mécanique :

On travaille dans le **référentiel du joueur, fixe**, dont les pieds sont liés au sol. C'est un référentiel terrestre supposé galiléen le temps du lancer de la boule.
Le **système** étudié est la **boule de pétanque**.
Le **bilan des forces**, si on néglige les forces exercées par l'air sur le système, ne fait apparaître que le **poids de la boule**.

Un solide en mouvement dans le champ de pesanteur uniforme, qui n'est soumis qu'à son poids, est appelé un projectile.

3) Application de la deuxième loi de Newton [1] :

On a donc, vu la seule force appliquée : $\vec{P} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow m \times \vec{g} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$

4) Equations horaires paramétriques :

a. Obtention de l'accélération sur les trois axes :

On projette sur les différents axes du repère :

Sur Ox : $\mathbf{a_x = 0}$ / **Sur Oy :** $\mathbf{a_y = 0}$ / **Sur Oz :** $\mathbf{a_z = -g}$

b. Obtention de la vitesse en fonction du temps sur les trois axes :

On a a = dv/dt. Donc pour avoir v = f(t), nous devons intégrer l'expression de l'accélération :

Sur Ox : $v_x(t) = 0 + cte_1$ / Sur Oy : $v_y(t) = 0 + cte_2$ / Sur Oz : $v_z(t) = -gt + cte_3$

Pour avoir la valeur de ces constantes, on regarde la valeur de v (t = 0) :

$v_x(t = 0) = 0$; $v_y(t = 0) = v_0\cos\alpha$; $v_z(t = 0) = v_0\sin\alpha$

D'où :

Sur Ox : $\mathbf{v_x(t) = 0}$ / **Sur Oy :** $\mathbf{v_y(t) = v_0\cos\alpha}$ / **Sur Oz :** $\mathbf{v_z(t) = -gt + v_0\sin\alpha}$

c. Obtention de la position en fonction du temps sur les trois axes :

On a v = dpos/dt. Donc pour avoir p = f(t), nous devons intégrer l'expression de la vitesse :

Sur Ox : $x(t) = 0 + cte'_1$ / Sur Oy : $y(t) = v_0\cos\alpha \times t + cte'_3$ / Sur Oz : $z(t) = -1/2gt^2 + v_0\sin\alpha \times t + cte'_3$

Pour avoir la valeur de ces constantes, on regarde la valeur de p (t = 0) :

$x(t = 0) = 0$; $y(t = 0) = 0$; $z(t = 0) = z_0$

D'où :

Sur Ox : $\mathbf{x(t) = 0}$ / **Sur Oy :** $\mathbf{y(t) = v_0\cos\alpha \times t}$ / **Sur Oz :** $\mathbf{z(t) = -1/2gt^2 + v_0\sin\alpha \times t + z_0}$

5) Conséquences : mouvement plan et équation de la trajectoire [2] et [3] :

a. Mouvement plan :

Puisque x = 0, le mouvement de la boule de pétanque ne s'effectue que dans le plan (yOz).
Ainsi, en exprimant z = f(y) ou y = g(z) on obtient l'équation de la trajectoire :

b. Equation de la trajectoire :

- D'après l'équation paramétrique sur Oy, on peut écrire : $t = \dfrac{y}{v_0\cos\alpha}$
- On reporte alors cette expression dans l'équation paramétrique selon Oz :

$$z(t) = -\frac{1}{2}\frac{g \times y^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + \frac{v_0\sin\alpha \times y}{v_0\cos\alpha} + z_0$$

$$\boxed{z(t) = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \times y^2 + \tan\alpha \times y + z_0}$$

Réponse au problème :

La seule condition initiale qui nous manque est la vitesse initiale v_0, on comprend donc que nous allons travailler sur cette vitesse pour savoir si la situation est possible.

- La boule ne doit pas monter plus haut que 3m : **z(t) < 3m**. Lorsqu'elle est au plus haut, on a $\mathbf{v_z(t) = 0}$.

$v_z(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$ on remplace dans l'équation suivante :

$$z(t) < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times g \times \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2} + v_0\sin\alpha \times \frac{v_0\sin\alpha}{g} + z_0 < 3 \ \ldots$$

$$\boxed{\Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2g(3-z_0)}{\sin^2\alpha}} = 9.2 \text{ m/s}}$$

- La boule doit atteindre une portée de 6m : **y(t) = 6m**. Quand elle tombe au sol : **z(t) = 0**.

y(t) = 6 $\Leftrightarrow t = \dfrac{6}{v_0 \cos\alpha}$ on remplace dans l'équation suivante :

z(t) = 0 $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \times g \times \dfrac{6^2}{v_0{}^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \times \dfrac{6}{v_0 \cos\alpha} + z_0 = 0$ …

$$\boxed{\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{0.5g\left(6^2/\cos^2\alpha\right)}{6\tan\alpha + z_0}} = 6.9 m/s}$$

Les deux conditions peuvent être respectées, le joueur pourra réaliser son tir.

Remarque :
On parle généralement de **portée** pour la **distance horizontale maximale** que peut atteindre un tir.
On parle de **flèche** pour la **hauteur maximale** que peut atteindre un tir.

Exercices n°7, 10 et 11 p 245/247