Chapitre 12 : Mouvement des planètes et des satellites

Connaissances et savoir-faire exigibles :

(1) Enoncer les lois de Kepler et les appliquer à une trajectoire circulaire ou elliptique.
(2) Définir un mouvement circulaire uniforme et donner les caractéristiques de son vecteur accélération.
(3) Connaître les conditions nécessaires pour observer un mouvement circulaire uniforme : vitesse initiale non nulle et force radiale.
(4) Énoncer la loi de gravitation universelle sous sa forme vectorielle pour des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique et la distance grande devant leur taille.
(5) Appliquer la deuxième loi de Newton à un satellite ou à une planète.
(6) Démontrer que le mouvement circulaire et uniforme est une solution des équations obtenues en appliquant la deuxième loi de Newton aux satellites ou aux planètes.
(7) Définir la période de révolution et la distinguer de la période de rotation propre.
(8) Exploiter les relations liant la vitesse, la période de révolution et le rayon de la trajectoire. (**Exercices**)
(9) Connaître et justifier les caractéristiques imposées au mouvement d'un satellite pour qu'il soit géostationnaire.
(10) Retrouver la troisième loi de Kepler pour un satellite ou une planète en mouvement circulaire uniforme.
(11) Exploiter des informations concernant le mouvement de satellites ou de planètes. (**Exercices**)

Introduction : ce que nous allons étudié :

Comme l'indique le titre du chapitre, le but est d'étudier les mouvements des planètes et des satellites. Ces derniers peuvent être de deux types :

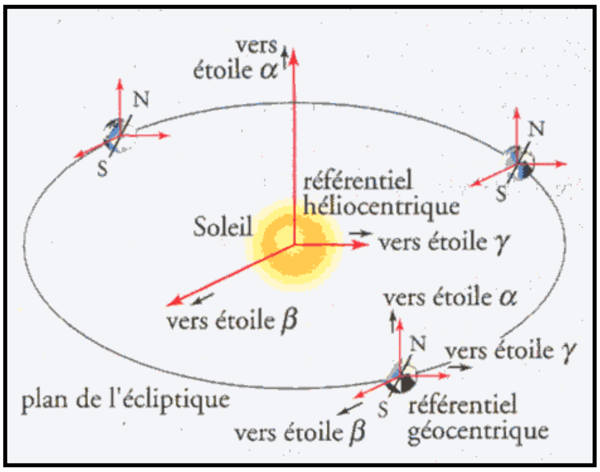
- Les **satellites naturels** comme le Lune en est un pour la Terre.
- Les **satellites artificiels**, ceux que lancent l'homme depuis plus de 40 ans.

Nous allons voir que pour ces trois types d'objets, le **mouvement est pratiquement similaire**, mais n'oublions pas que **pour étudier un mouvement il faut choisir un référentiel.**

I Choisir le bon référentiel [7] :

En « mécanique terrestre », nous avons toujours choisit un référentiel terrestre, constitué par un objet lié à la terre. Mais la terre étant en mouvement, un tel référentiel ne conviendra pas pour notre sujet d'étude :

- Pour étudier le **mouvement des planètes autour du soleil**, le meilleur référentiel est constitué par un **repère qui serait positionné au centre du Soleil et dont les trois axes pointeraient vers trois étoiles de l'univers, très lointaines donc considérées comme fixe**. On l'appelle le **référentiel héliocentrique**, il est **galiléen** (le principe d'inertie est vérifié dans ce référentiel) :



- Pour étudier le **mouvement de la lune ou des satellites artificiels de la Terre**, on imagine un **repère placé au centre de la terre dont les trois axes pointent dans le même sens et la même direction que ceux du référentiel héliocentrique**.
  On appelle ce référentiel, **référentiel géocentrique**, il est considéré comme galiléen

- Dans le référentiel géocentrique, la Terre a un **mouvement de rotation propre** autour de l'axe de ses pôles (la période de rotation propre est de 23H56mn environ).

- Ce référentiel géocentrique (donc la Terre) est en mouvement de rotation autour du centre du repère lié au référentiel héliocentrique. On appelle ce mouvement **mouvement de révolution** (la période de révolution de la terre autour du soleil est de 365.25 jours environ).

II Les trois lois de Kepler (1) :

Activité documentaire historique

Ces trois lois s'applique dans le référentiel héliocentrique en considérant une planète du système solaire comme le système matériel étudié.

1) 1ère loi : la loi des orbites :

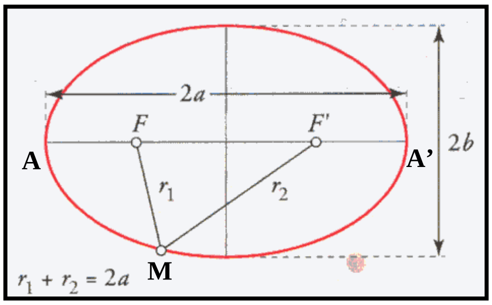
Dans le référentiel héliocentrique, **le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.**
Mise à part Mercure et Pluton, les planètes du système solaire on des **trajectoires pratiquement circulaires**.

Remarque : qu'est-ce qu'une ellipse au sens mathématiques :

Une ellipse est formée par **l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers F et F') est constante** : MF + MF' = AA' = 2a (AA' est le grand axe)
On définie l'excentricité de l'ellipse par :

$$\boxed{e = \frac{FF'}{AA'}}$$

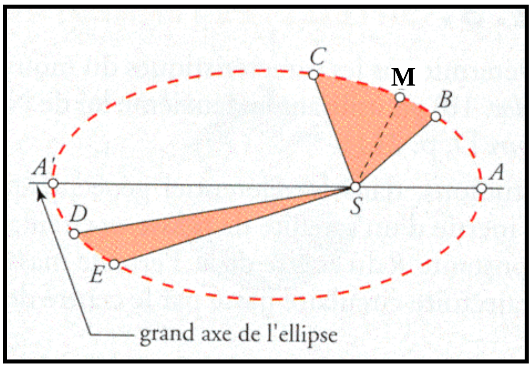
Si e = 0 (FF'=0), l'ellipse devient un cercle



2) 2ème loi : la loi des aires :

Le rayon vecteur SP qui relie la planète P au soleil S **balaie des aires égales en des temps égaux.**

Consequences :



- Les aires des triangles SBC et SDE sont égales.
- La portion d'ellipse **BC est parcourue dans le même temps que la portion DE**, ce qui implique que **la planète va plus vite quand elle est proche d'un foyer de l'ellipse que quand elle est loin.**

3) 3ème loi : relation entre la période de révolution et le demi grand axe :

Le rapport entre le carré de la période de révolution T d'une planète et le cube du demi-grand axe ($a = \frac{AA'}{2}$) de l'orbite elliptique est constant : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}}$

La valeur de la constante ne dépend que du Soleil (pas de la planète considérée)

Pour une trajectoire circulaire : on T^2/r^3 = cte.

IV Le mouvement circulaire uniforme (2) et (3) :

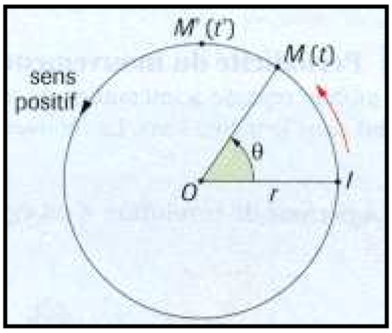
Nous venons de voir que la trajectoire des planètes pouvait être assimilé à un cercle, et nous verrons un peu plus loin que ce mouvement a une particularité : il est uniforme !

1) Définition :

Un mouvement d'un point matériel **est circulaire uniforme si sa trajectoire a la forme d'un cercle** et si la **valeur de sa vitesse** sur la trajectoire est **constante**.

2) Coordonées polaires et base de Frenet :

- Pour traiter ce type de mouvement il est souvent plus simple d'utiliser un autre système de coordonées que le système cartésien. Il s'agit des **coordonées polaires** :

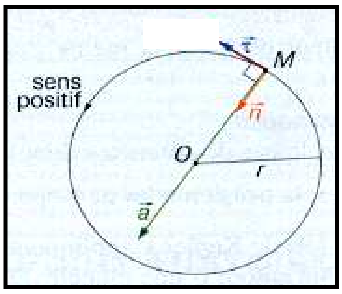


Nous avons vu cela en 1ère S :

- ✓ Le point matériel sur le cercle est repéré par **r, le rayon du cercle** (en m) ; et **θ(t), l'angle** entre la position à l'instant t et une position antérieure à un instant choisi comme origine (en rad).
- ✓ Vous pourrez entendre parler **d'abscisse curviligne** : $s(t) = r\times\theta(t)$ s(t) exprimée en mètre.
- ✓ On peut définir aussi la **vitesse angulaire** par $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

  ω exprimée en rad/s.

- Egalement, les vecteurs vitesse et accélération vont pouvoir être projetés sur deux axes qui tournent dans le même temps que le point matériel le long de sa trajectoire :



Il s'agit de la **base de Frenet** :

- ✓ Un **vecteur tangent** à la trajectoire, généralement noté $\vec{\tau}$.
- ✓ Un **vecteur normal** à la tajectoire, généralement noté $\vec{n}$.

3) Caractéristiques de la vitesse et de l'accélération dans un mouvement circulaire uniforme :

- D'après la définition de l'abscisse curviligne, on a $\underline{v(t)} = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \underline{r\times\omega}$

  La vecteur **vitesse est tangent à la trajectoire**, comme dans tout mouvement, donc dirigé uniquement **selon le vecteur tangent $\vec{\tau}$.**

- La vitesse est constante sur le cercle, le mobile va donc toujours parcourir sa trajectoire dans le même temps : le mouvement est périodique :

$$vitesse = \frac{distance}{temps} \Leftrightarrow temps = \frac{distance}{vitesse} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

- L'accélération est obtenue en effectuant la dérivée du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. On peut alors démontrer que ce vecteur accélération possède les caractéristiques suivantes :
  - ✓ Point d'application : le point matériel considéré.
  - ✓ Direction : normale à la trajectoire, **selon le vecteur normal $\vec{n}$.** On parle de direction normal ou de direction radiale.
  - ✓ Sens : vers le centre de la trajectoire circulaire : $\vec{a}$ **est centripète**.

- ✓ Sa valeur est déterminée : $\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$ a en $m.s^{-2}$; v en $m.s^{-1}$ et r en m.

4) Conditions d'obtention d'un tel mouvement :

Ecrivons la deuxième loi de Newton pour ce type de mouvement :

$$\Sigma\vec{F} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow \Sigma\vec{F} = m \times \frac{v^2}{r} \times \vec{n}$$

- On voit donc que pour obtenir un mouvement circulaire uniforme, il faut avoir une **résultante des forces extérieures radiale** (ou normale) **et centripète** (dirigée vers le centre).
  Remarquesq :
  - ✓ Une seule force peut suffire.
  - ✓ Comme m et v sont constants, cette force en dépendra que de r !

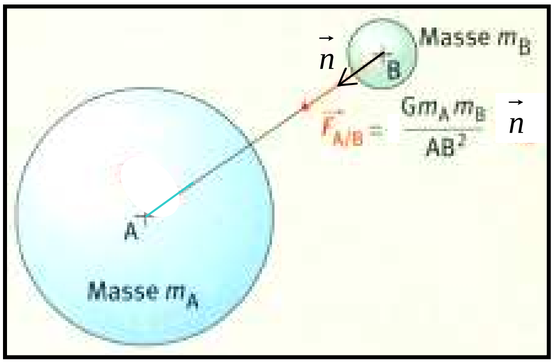
- Il faudra aussi forcément que la **vitesse initiale soit non nulle** (si la vitesse est constante, elle est constamment égale à sa valeur initale ; pour qu'il y ait mouvement, il faut qu'elle soit non nulle).

III Etude du mouvement d'une planète autour du soleil :

Pour étudier le mouvement d'un « solide », il faut choisir au préalable un référentiel et un système : les choix sont simples ici : **référentiel : héliocentrique, galiléen ; système : la planète considérée**.
Reste à connaître la (ou les) force(s) appliquée(s) :

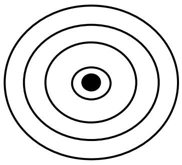
1) La loi de la gravitation universelle par Newton [4] :

- Cette loi a été vue en 2nde et en 1ère S, mais nous allons voir une forme vectorielle. Ceci est résumé dans le schéma ci-dessous :



Cette loi n'est valable que si on considère que les corps sont à répartition sphérique de masse et que la taille des corps est petite devant la distance qui les sépare :

Un corps à répartition sphérique de masse est un corps dont la **matière est répartie uniformément** autour de lui ou en couches sphériques homogènes autour de son centre :



Rq : Cela revient à dire que la masse volumique est égale dans une même couche.

Nous considèrerons que tous les astres étudiés (Lune, Terre, Soleil, Planètes) ont cette propriété.

- Dans notre cas, nous prenons pour le **corps A le Soleil de masse M_S** et pour le **corps B la planète considérée de masse m**. La **distance** entre ces deux astres sera notée **r**.

2) Modélisation du mouvement :

a. Application de la 2ème loi de Newton à la planète considérée [5] :

$$\vec{F}_{S/P} = m \times \vec{a}$$

Projetons sur les deux axes de la base de Frenet :

- Sur $\vec{\tau}$: la force étant radiale, elle n'a pas de composante sur cet axe : $a_\tau = 0$
- Sur $\vec{n}$: $G \times \frac{m \times M_S}{r^2} = m \times a_n$ d'où $\boxed{a_n = G \times \frac{M_S}{r^2}}$

L'accélération de la planète dans son mouvement est **uniquement radiale**, **dirigée vers le centre du soleil**.

b. Modélisation du mouvement [6] :

Comme nous l'avons vu dans l'étude du mouvement circulaire uniforme, l'accélération dans ce type de mouvement est radiale dirigée vers le centre de la trajectoire.

Ainsi, une planète dans son mouvement autour du soleil, présente une accélération avec les mêmes caractéristiques :
Le mouvement circulaire uniforme apparaît comme l'une des solutions de l'application de la deuxième loi de Newton à une planète dans son mouvement autour du soleil.

c. Retour sur la 3ème loi de Kepler [10] :

Reprenons l'expression de l'accélération normale obtenue ci-dessus et remplaçons an par sa valeur v^2/r :

$$\frac{v^2}{r} = G\times\frac{M_S}{r^2} \quad (*)$$

- D'un part, on peut alors obtenir une expression de la vitesse : $\boxed{v = \sqrt{\frac{G\times M_S}{r}}}$
- D'autre part, on a vu que pour un mouvement circulaire uniforme : $T = \frac{2\pi r}{v}$ $d'où\ v = \frac{2\pi r}{T}$. Si on remplace dans (*), on obtient : $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2\times r} = \frac{G\times M_S}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = cte}$

Cette expression traduit donc la 3ème loi de Kepler pour une planète tournant autour du soleil selon une orbite circulaire.
La constante ne dépend que de la masse du soleil, astre attracteur.

IV Etude du mouvement des satellites de la terre

1) Mouvement et grandeurs caractéristiques :

a. Application de la 2ème loi de Newton à la planète considérée [5] :

- Pour le travail sur les satellites de la terre on va travailler dans le référentiel géocentrique, et cette fois-ci l'astre attracteur est la terre (masse : M_T ; rayon : R_T).
- La seule force qui s'exerce sur notre système satellite (de masse m et d'altitude h) a donc pour expression : $$\overrightarrow{F_{T/sat}} = G\times\frac{m\times M_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_{satT}}$$
- Cette force est radiale dirigée vers le centre de la terre, elle nous permet d'obtenir (après application de la 2ème loi de Newton) l'expression de l'accélération normale du satellite :

$$a_n = G\times\frac{M_T}{r^2}$$

Le mouvement circulaire uniforme est donc aussi une solution possible pour le mouvement d'un satellite autour de la terre.

b. Grandeurs caractéristiques d'un satellite autour de la Terre :

- On peut facilement obtenir la vitesse du satellite, comme pour une planète : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}}$

- On a également la période de révolution du satellite : $T = \dfrac{2\pi(R_T + h)}{v} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{GM_T}}}$

Ces deux grandeurs caractéristiques du mouvement du satellite ne dépendent que de l'altitude de celui-ci, elles ne dépendent pas de la masse du satellite.

2) Les satellites géostationnaires [9] :

- Comme leur nom l'indique, **ces satellites sont fixes (*stationnaire*) par rapport à la terre (*géo*).**

Pour que ce soit le cas, il faut que
- ✓ Ils décrivent un **mouvement circulaire uniforme** dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles terrestres. Ils évoluent donc dans un **plan contenant l'équateur**.
- ✓ Qu'ils **tournent dans le même sens que la terre** autour de l'axe des ses pôles.
- ✓ Leur **période de révolution soit exactement égale à la période de rotation de la terre** autour de l'axe de ces pôles (24H environ).

- On peut calculer l'altitude à laquelle le satellite doit se situer pour satisfaire cette dernière condition :

  - ✓ Utilisons la 3ème loi de Kepler applicable à ce satellite : $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ avec $r = R_T + h$
  - ✓ On calcul : $r = \sqrt[3]{\dfrac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{6.67*10^{-11} \times 5.976*10^{24} * (24*3600)^2}{4\pi^2}} = 42.2*10^6\,m$
  - ✓ Donc l'altitude est : $\underline{h} = 42.2*10^6 - 6.4*10^6 = 36*10^6$ m = <u>36 000 Km</u>

3) Etat d'un corps situé dans un satellite en mouvement autour de la Terre :

On suppose que ce corps est tout d'abord lié au satellite. Alors lorsque le satellite est en orbite, l'objet est animé du même mouvement que le satellite.

Si on le libère à un instant t, celui-ci n'est plus soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre. D'après la loi de Newton, le satellite et l'objet qu'il contient sont soumis à la même accélération radiale qui ne dépend que de leur distance au centre de la terre.

Comme leur distance au centre de la Terre est égale, ils ont exactement le même mouvement, l'objet semble flotter dans le satellite. En fait, ils sont tous les deux animés du même mouvement de chute libre tout autour de la terre.

C'est l'état d'impesanteur !

<u>Rq :</u>
On ne peut pas appliquer le principe d'inertie dans le référentiel du satellite car celui-ci n'est pas galiléen. En effet, l'objet est immobile par rapport au satellite, pourtant il n'est pas soumis à des forces qui se compensent !

Exercices n°8 p 262 (corrigé dans livre) ; n°12 p 263 ; n°19 p 265/266 et n°20 p 266