Chapitre 14 : Système solide-ressort

Connaissances et savoir-faire exigibles :

(1) Connaître les caractéristiques de la force de rappel exercée par un ressort.
(2) Appliquer la deuxième loi de Newton au solide et effectuer la résolution analytique dans le cas d'un dispositif oscillant horizontalement.
(3) Connaître la signification de tous les termes intervenant dans la solution de l'équation différentielle et leur unité.
(4) Connaître et savoir exploiter l'expression de la période propre, vérifier son homogénéité par analyse dimensionnelle.
(5) Savoir que la résonance mécanique se produit lorsque la période de l'excitateur est voisine de la période propre du résonateur.
(6) Savoir que l'augmentation de l'amortissement provoque une diminution de l'amplitude.
(7) Connaître des exemples de résonance mécanique.

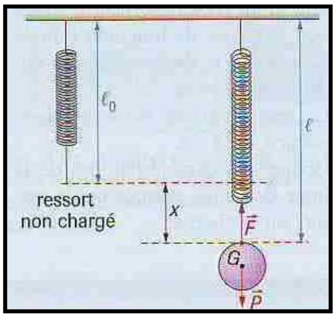
Savoir-faire expérimentaux :

(8) Enregistrer un mouvement oscillant amorti.
(9) Savoir mesurer une amplitude, une pseudo-période.
(10) Savoir faire varier l'amortissement.
(11) Savoir montrer l'influence des paramètres masse et rigidité (k) sur la période propre.

I Présentation de 3 types de système solide-ressort :

a. Le plus simple à imaginer :

Quand on parle de système solide-ressort, on pense tout de suite au parallèle que l'on pourrait faire avec le pendule simple :
Le système serait donc constitué d'un **ressort de longueur à vide l_0** qui lorsque **qu'on lui accroche une masse m s'étire jusqu'à la longueur l** :



Doc n°1

b. Celui que l'on utilise en théorie (1) :

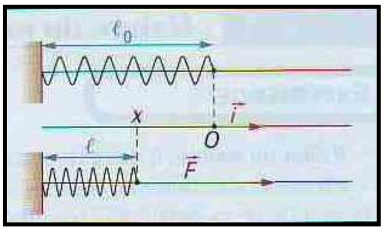
Le ressort est horizontal, une masse (ponctuelle) est accrochée à son extrémité.
On peut alors définir facilement la force de rappel du ressort :

- On appelle **x l'allongement du ressort** qui est définit par :

$$x = l - l_0$$

La force de rappel sera proportionnelle à cet allongement.

- La **force de rappel est également proportionnelle à une constante**, liée à la nature du ressort est appelée **constante de raideur** du ressort. Elle est **notée k et s'exprime en N.m^{-1}.**

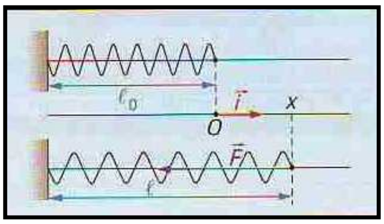


Doc n°2

On utilise un axe orienté $O\vec{i}$ pour se repérer.

- Si le ressort est comprimé :
  - ✓ L'allongement est négatif
  - ✓ La force doit être dans le sens de l'axe $O\vec{i}$

La force de rappel sera : $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$



Doc n°3

- Si le ressort est étiré :
  - ✓ L'allongement est positif
  - ✓ La force doit être dans le sens inverse de l'axe $O\vec{i}$

La force de rappel sera : $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$

<u>CL :</u> Quelque soit la situation, la force de rappel d'un ressort est de la forme :

$$\boxed{\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}}$$

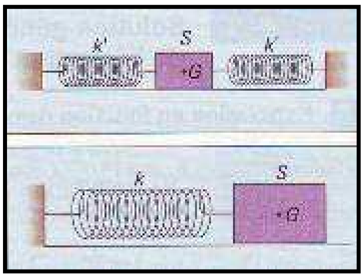
F en N ; k en $N.m^{-1}$; x en m

Ses caractéristiques sont donc :
Direction : celle du ressort, sens : selon si le ressort est comprimé ou étiré ; point d'application : extrémité du ressort ; norme : $F = k|x|$

c. <u>Celui que l'on utilise lors d'expérience :</u>

Il est constitué par **deux ressorts fixés de part et d'autre du solide** de masse m. Ainsi, on obtient un mouvement rectiligne du solide.

Les **deux ressorts** de constante de raideur k' sont **assimilables à un seul** ressort de constante de raideur k = 2k'



<u>Doc n°4</u>

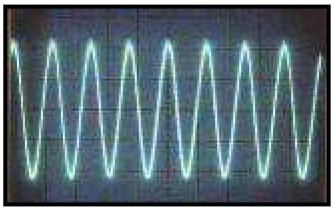
<u>II Etude du mouvement d'un système solide-ressort horizontal :</u>

1) <u>Etude expérimentale :</u>

On utilise le système décrit en dernier dans le paragraphe précédent.
Le banc est muni d'un coussin d'air ce qui permet d'éviter tous frottements entre le banc et le solide.
On provoque le mouvement du solide et on l'enregistre avec un système d'acquisition adapté.

<u>Observations :</u>

- Le mouvement du solide est **périodique**, on observe des **oscillations autour d'une position d'équilibre.**
- Ces oscillations semblent être de **période constante**.
- Ce mouvement semble être **le même que celui du pendule simple** écarté de sa position d'équilibre.



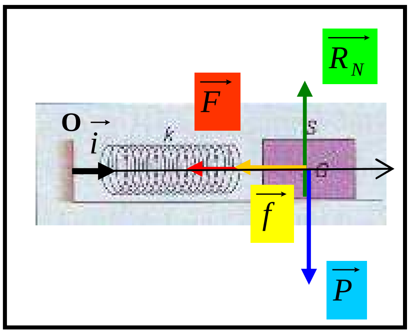
<u>Doc n°5</u>

2) <u>Etude théorique : Equation différentielle du mouvement [2] :</u>

a. <u>Référentiel :</u> La table sur laquelle est posé le dispositif expérimental, fixe, supposé galiléen.

b. <u>Système :</u> Le solide qui est relié aux deux ressorts.

c. <u>Bilan des forces :</u> Le poids du solide : $\vec{P}$; La réaction du support : $\vec{R}$ [$= \vec{R_N}$ (réaction normale) + $\vec{f}$ (force de frottements)] ; La force de rappel du ressort : $\vec{F}$



<u>Doc n°6</u>

d. <u>Deuxième loi de Newton :</u>

$\sum \vec{F_{est}} = m \times \vec{a_G} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f} + \vec{F} = m \times \vec{a_G}$. En projection sur l'axe O$\vec{i}$:

$0+0-f-k\,x = m\times a_{Gx}$. Or $a_{Gx} = \frac{dv_{Gx}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ d'où : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x = -\frac{f}{m}}$

Equation différentielle du mouvement tenant compte de frottements

3) Solution de l'équation différentielle (frottements négligeables) :

a. Equation différentielle lorsque les frottements sont négligeables :

Lorsque les frottements sont négligeables, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x = 0$$

b. Vérification de la validité d'une solution :

- Vérifions que la solution de forme $x = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$ est solution de cette équation différentielle :
- Dérivons deux fois cette expression :

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}}\times x_m \times \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\times x_m \times \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

- Remplaçons dans l'équation différentielle :

$$-\frac{k}{m}\times x_m \times \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)+\frac{k}{m}\times x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right) = 0$$

La solution proposée est bien solution de l'équation différentielle du mouvement (sans frottements)

c. Expression de la solution (3) et (4) :

- La solution est donc périodique (c'est une fonction cosinus), on peut alors définir une période propre (pas d'amortissement.

  Si celle-ci est noté T_0 et étant donnée que le cosinus est périodique de période 2π, on peut écrire :

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T_0)+\varphi_0 - \sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0 = 2\pi \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}T_0 = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- On peut vérifier la validité de cette expression par **analyse dimensionnelle** :

$$[T_0] = \sqrt{\frac{[m]}{[k]}}$$

Une unité pour k est $N.m^{-1}$ et d'après la deuxième loi de Newton (F = ma) le newton est équivalent à une dimension $M.L.T^{-2}$.
Donc k a pour dimension : $M.T^{-2}$

$$[T_0] = \sqrt{\frac{M}{M.T^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

La période propre des oscillations du solide relié à un ressort a bien pour dimension un temps.

- Expression de la solution de l'équation différentielle en fonction de la période propre :

$$\boxed{x = x_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}+\varphi_0\right)}$$

x_m : **Amplitude** du mouvement (en **m**)
T_0 : **Période propre** des oscillations (en **s**)
φ_0 : **Phase à l'origine** des temps (en **rad**)

Les constantes x_m et φ_0 seront déterminées à l'aide des conditions initiales.

III Le phénomène de résonance :

1) Présentation des oscillations forcées :

- Les **oscillateurs** que nous avons vu pour le moment étaient **peu amortis** : on leur fournissait au départ une énergie (amplitude initiale) puis les laissant osciller, ils revenaient à leur position d'équilibre stable du fait de l'amortissement. On appelait ces oscillateurs des **oscillateurs libres**.

- Il est **possible de contrer l'effet de l'amortissement** comme nous l'avions fait en électricité (RLC). Pour cela il faut **apporter de l'énergie de même nature que celle qui a été perdue**.
  En électricité, on apportait de l'énergie électrique (par la résistance négative), ici on va devoir apporter de l'énergie mécanique (voir chapitre suivant).

- Mais en électricité, on apportait juste l'énergie nécessaire pour contrer les effets de l'amortissement. **Ici, on ne fait pas qu'entretenir les oscillations, on va forcer les oscillations, c'est à dire leur imposé une fréquence d'oscillations.**

- Excitateur et résonateur :

  a. On va donc utiliser un **dispositif permettant d'apporter cette énergie**, on l'appelle l'**excitateur** : Celui-ci est animé d'un mouvement sinusoïdale continuel de période T réglable.
  b. **L'oscillateur qui reçoit l'énergie est appelé résonateur** : C'est oscillateur peu amorti qui oscille, libre, avec une période propre T_0.
  c. **Les oscillations seront forcées quand l'excitateur imposera ses oscillations au résonateur**

2) Mise en évidence expérimentale et caractéristiques du phénomène :

a. Dispositif expérimental :

Pour étudier ce phénomène, on peut utiliser un **système solide ressort** qui constituera le **résonateur**.
En guise d'**excitateur**, on peut utiliser un **vibreur**, **ou** à défaut, un **haut parleur relié à un GBF**, c'est ce dernier qui va faire osciller la membrane du HP qui sera elle-même reliée au résonateur.

Doc n°7

b. Expériences :

- ✓ Prenons le **résonateur** seul et déterminons par mesure sa **période propre d'oscillation.**
  $$T_0 = 0.75 \text{ s}$$
- ✓ Relions-le à l'excitateur et mettons ce dernier en marche à une fréquence quelconque.
  Obs : Le résonateur a un mouvement désordonné.
- ✓ Faisons varier la fréquence jusqu'à observer un mouvement particulier du résonateur :
  Notons la fréquence de l'excitateur :
  $$T = 0.75 \text{ s}$$
- ✓ Augmentons l'amortissement du résonateur (on fait évoluer le solide dans de l'eau par exemple) : la résonance se fait toujours à la même période, seul l'amplitude des oscillations changent.

c. Conclusion (5) et (6) :

- ✓ **Ce mouvement particulier et un mouvement d'oscillation de grande amplitude.**

- ✓ Lorsque l'on observe ce mouvement particulier du résonateur on dit que **l'on se situe à la résonance.**
- ✓ Ce mouvement est obtenu lorsque la **fréquence de l'excitateur est voisine de la fréquence propre du résonateur.**
- ✓ Si l'**amortissement** du résonateur **augmente**, alors **à la résonance l'amplitude des oscillations est moins importante.**

3) Exemples de résonances en mécanique [7] :

a. Dans les instruments de musiques :

La majorité des instruments de musiques sont composés de deux parties :
- ➢ Un **objet vibrant** (corde de la guitare, anche du saxophone, peau du tambour) constitue **l'excitateur**.
- ➢ Une **caisse de résonance** joue le rôle du résonateur.

Pour que l'amplification ait lieu, il faut que les deux types d'objet soient « accordés ».

Expérience :
- ✓ **Un diapason est relié à deux caisses de résonance de longueurs différentes**. Observons la différence entre les deux sons produits.
- ✓ Une des deux caisses est accordée au diapason (sa longueur est égale à $\lambda_{diapason}/2$).

b. Pour les ouvrages du BTP :

On connaît tous la **légende du pas cadencé de soldats qui aurait détruit un pont** : la fréquence des vibrations provoquées par le pas des soldats a joué le rôle d'excitateur et a fait rentrer en résonance le pont (oscillations verticales), celui-ci s'est alors brisé.

c. En ce qui concerne les amortisseurs :

Imaginez votre voiture ou votre moto qui, au passage d'un dos d'âne, se met à osciller avec une fréquence très importante ! vous revendez sans tarder votre véhicule.

Ainsi les concepteurs de ces véhicules travaillent sur les amortisseurs pour qu'ils ne puissent jamais entrer en résonance. **En effet dans ce domaine, le but est d'éviter à tout prix le phénomène de résonance.**

Exercices n°11 p298, n°15 p 299, n°15 et 17 p 312