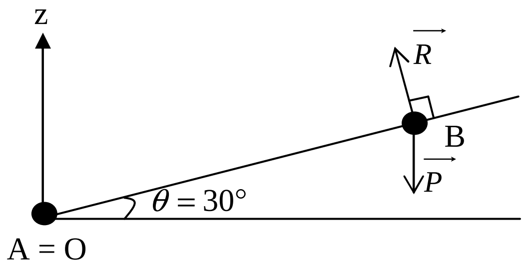
Correction des exercices chapitre 15

Exercice n°15 p 328 :



Référentiel : La table sur laquelle est posée le plan incliné, référentiel terrestre supposé galiléen.
Système : la masse m
Forces : Le poids et la réaction, perpendiculaire à la ligne de plus grande pente du plan incliné car absence de frottements.
On pose $v_A = v_i$.
On prend l'axe Oz vertical vers le haut avec pour origine $z_A = 0$.

1) Utilisons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{est}}\right) \Leftrightarrow 1/2mv_B{}^2 - 1/2mv_A{}^2 = W_{AB}\left(\vec{P}\right) + W_{AB}\left(\vec{R}\right)$$

Or le travail de la réaction du plan est nul car la force de réaction est perpendiculaire au plan incliné.
D'autre part, la vitesse en B est nulle puisque B est le point ultime atteint par la masse, elle peut ensuite redescendre ou rester immobile.

Donc : $-1/2mv_A{}^2 = W_{AB}\left(\vec{P}\right) = P \times AB \times \cos(30+90) \Rightarrow v_A = \sqrt{\dfrac{P \times AB \times \cos(30+90)}{-1/2m}}$

Comme cos (30+90) a une valeur négative, il n'y a pas de problème de signe sous la racine.
On trouve : $\boxed{v_A = 3.1 \text{ m/s}}$

On peut obtenir le même résultat avec la conservation de l'énergie mécanique :

$$1/2mv_A{}^2 + mgz_A = 1/2mv_B{}^2 + mgz_B$$

2) a. Différence d'énergie mécanique entre A et C :

$$\Delta E_m = E_{mA} - E_{mC} = 1/2mv_A{}^2 + mgz_A - 1/2mv_C{}^2 - mgz_C \Leftrightarrow 1/2m\frac{mgAB\cos(\alpha+90)}{-1/2m} + 0 - 0 - mgAC\sin\alpha$$

Donc $\Delta E_m = mgAB\cos(\alpha+90) - mgAC\sin\alpha = -mgAB\sin\alpha - mgAC\sin\alpha$

Finalement : $\boxed{\Delta E_m = -(AB+AC)mg\sin\alpha}$

b. Cette perte énergétique est due au travail de la force de frottements :

$W_{AC}\left(\vec{f}\right) = f \times AC \times \cos(180) = \Delta E_m = -(AB+AC)mg\sin\alpha$ d'où $\boxed{f = \dfrac{(AB+AC)mg\sin\alpha}{AC}}$

Exercice n°26 p 330 :

1) Les forces qui s'exercent sur le mobile sont :
Le poids du mobile, verticale vers le haut.
La réaction du banc à coussin d'air, verticale vers le bas (absence de frottements).
La force de rappel du ressort, horizontale vers la droite ou la gauche.

2) Référentiel : le banc à coussin d'air sur lequel évolue le mobile, référentiel terrestre supposé galiléen.
Système : le mobile qui oscille sur le banc.
Forces : $\vec{P}$; $\vec{R}$ et $\vec{F}$

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{est}} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \times \vec{a}$

Le mouvement est uniquement horizontal, projetons sur un axe horizontal :

$$-k \times x = m \times \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

3) Si on trace la fonction $\ddot{x} = f(x)$ et que celle-ci est représentée par une droite, alors le coefficient directeur de cette droite est –k/m.
La représentation donnée est bien une droite, on calcule sa pente :

$$-\frac{k}{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{16-(-16)}{-0.08-0.08} = -\frac{32}{0.16} = -2.0*10^2$$

D'où $\underline{k} = 2.0*10^2 \times m = 2.0*10^2 \times 0.1 = \underline{20\ N.m^{-1}}$

4) Alors que la force de rappel du ressort s'exprime par $\vec{F} = -k \times x \times \vec{i}$ si $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe horizontal ; la force de tension s'exprime par : $\overrightarrow{F_{op}} = k \times x \times \vec{i}$
Exprimons le travail élémentaire de cette force pour un déplacement élémentaire suivant l'axe x'x :

$$\delta W = \overrightarrow{F_{op}} \bullet \overrightarrow{dl} = F_{op} \times dx$$

En effet, le déplacement élémentaire est rectiligne et F_{op} et dx sont colinéaires.

Pour obtenir le travail entre A et B de cette force, on intègre le travail élémentaire sur le déplacement AB :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{op}}\right) = \int_A^B k \times x \times dx = \left[\frac{1}{2} k\ x^2\right]_A^B = \frac{1}{2} k\left(x_B{}^2 - x_A{}^2\right)$$

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{op}}\right) = \frac{1}{2} \times 20 \times \left(0.06^2 - 0.04^2\right) = 0.02\ J$$

5) Ce travail n'est pas égale au produit scalaire entre la force $\overrightarrow{F_{op}}$ et $\overrightarrow{AB}$ car ceci n'est valable que pour une force constante. Or $\overrightarrow{F_{op}}$ n'est pas une force constante le long du déplacement AB puisqu'elle dépend de l'élongation du ressort.

6) Il n'y a pas de frottements, donc on sait qu'il y a conservation de l'énergie entre les allongements A et B. On peut écrire : $E_{CA} + E_{PélA} = E_{CB} + E_{PélB}$ (*)

Or d'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les allongements A et B on peut écrire :

$$E_{CB} - E_{CA} = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

D'autre part on sait que la seule force qui travaille est la force de rappel du ressort puisque le poids et la réaction du banc sont perpendiculaires au mouvement. Ainsi :

$$E_{CB} - E_{CA} = W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2} k\left(x_A{}^2 - x_B{}^2\right) \Leftrightarrow E_{CB} + \frac{1}{2} k x_B{}^2 = E_{CA} + \frac{1}{2} k x_A{}^2 \quad (**)$$

En comparant (*) et (**), on peut écrire : $\boxed{E_{Pél} = \frac{1}{2} k\ x^2}$

$E_{mB} = E_{CB} + E_{PélB} = ½\ m\ v_B^2 + ½\ k\ x_B^2 = 0.5 \times 0.1 \times 0.75^2 + 0.5 \times 20 \times 0.06^2 = 6.4 \times 10^{-2}$ J

7) L'amplitude du mouvement est la valeur maximal (en valeur absolue) de l'allongement x. Elle est obtenue lorsque la vitesse à cet allongement est nulle. On peut écrire :

$$Em = ½\ k\ x_{max}^2 \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{E_m}{0.5 \times k}} = \sqrt{\frac{6.4*10^{-2}}{0.5 \times 20}} = 0.08m = 8cm$$