

TP N°7-PROF :

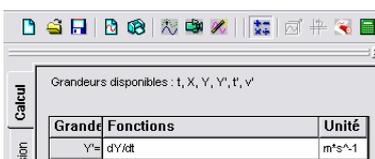
ETUDE DE LA CHUTE D'UNE BILLE DANS UN LIQUIDE. RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE PAR UNE METHODE ITERATIVE

I Acquisition de la chute de la bille :

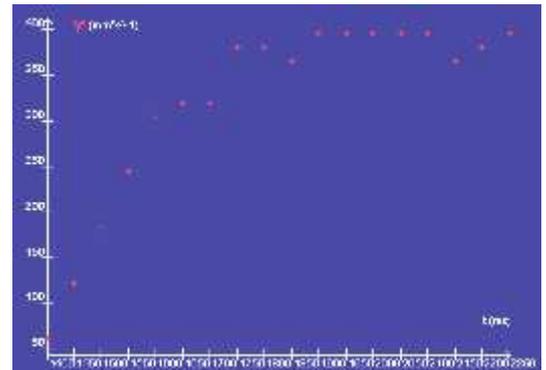
1) Manipulation :

Vidéo : voir dossier vidéo méca chute bille eau+glycérine

Pour calculer et afficher la courbe $v_{exp}=f(t)$:



Grd	A	B	C	D
Unité	t	X	Y	Y'
1	1,40E+00	0,00E+00	0,00E+00	6,08E-02
2	1,45E+00	0,00E+00	4,56E-03	1,22E-01
3	1,50E+00	0,00E+00	1,22E-02	1,82E-01
4	1,56E+00	-1,52E-03	2,28E-02	2,43E-01
5	1,60E+00	-1,52E-03	3,65E-02	3,04E-01
6	1,65E+00	-3,04E-03	5,32E-02	3,19E-01
7	1,70E+00	-1,52E-03	6,84E-02	3,19E-01
8	1,75E+00	1,52E-03	8,51E-02	3,80E-01
9	1,80E+00	0,00E+00	1,06E-01	3,80E-01
10	1,85E+00	1,52E-03	1,23E-01	3,65E-01
11	1,90E+00	0,00E+00	1,43E-01	3,95E-01
12	1,95E+00	1,52E-03	1,63E-01	3,95E-01
13	2,00E+00	3,04E-03	1,82E-01	3,95E-01
14	2,05E+00	3,04E-03	2,02E-01	3,95E-01
15	2,10E+00	4,56E-03	2,22E-01	3,95E-01
16	2,15E+00	-1,52E-03	2,42E-01	3,65E-01
17	2,20E+00	4,56E-03	2,58E-01	3,80E-01
18	2,25E+00	1,52E-03	2,80E-01	3,95E-01



Au début, la vitesse augmente pratiquement proportionnellement au temps et assez rapidement ; puis à partir du milieu de l'acquisition, l'augmentation fléchit jusqu'à ce que la vitesse atteigne une valeur limite.

II Modélisation de la chute de la bille :

1) Résolution de l'équation différentielle du mouvement par la méthode d'Euler :

a. A propos de l'équation différentielle :

Référentiel : le sol sur lequel est posé l'éprouvette. Système : la bille. Bilan des forces : Poids, poussé d'Archimède et force de frottement fluide.

$$\vec{\Sigma F} = m \times \vec{a}_G = m \times \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \Leftrightarrow m \times \frac{dv_z}{dt} = P - \Pi - f = m \times g - \rho \times V \times g - k \times v_z$$

$$\text{Alors } m \times \frac{dv}{dt} = -k \times v + (m - \rho \times V) \times g \quad \text{Donc } \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \times v + g \left(1 - \frac{\rho \times V}{m} \right) = a \times v + b$$

$$\text{On a donc : } a = -\frac{k}{m} \text{ et } b = g \left(1 - \frac{\rho \times V}{m} \right)$$

On sait que l'on atteint la vitesse limite lorsque $dv/dt = 0$ donc quand :

$$0 = a \times v_{\text{lim}} + b \quad \text{D'où on peut écrire que } a = -\frac{b}{v_{\text{lim}}}$$

$$\text{Or } k = -m \times a \text{ donc } k = \frac{m \times b}{v_{\text{lim}}}$$



➤ Si on choisit δt suffisamment petit, on peut écrire : $\frac{\delta v}{\delta t} = av + b$ et $\delta v = (av + b) \times \delta t$

Donc $v(t + \delta t) = v(t) + \delta v = v(t) + (a \times v(t) + b) \times \delta t$

b. Mesure des paramètres nécessaires à la résolution :

- Masse de la bille : $m = 5.72 \text{ g}$
- Rayon de la bille : $r = 0.815 \text{ cm}$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2.27 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 2.27 \times 10^{-3} \text{ L}$
- Masse volumique du liquide :

On prend une éprouvette graduée, on la pose sur une balance. On tare la balance puis on verse 50 mL du liquide dont on doit déterminer la masse volumique. On relève la masse obtenue puis on effectue le

calcul : $\rho' = \frac{m_{liq}}{V} = \frac{59.01}{50} = 1.18 \text{ g/cm}^3 = 1180 \text{ g/L}$

➤ Calcul de b : $b \equiv g \left(1 - \frac{\rho' V}{m} \right) = 9.81 \times \left(1 - \frac{1180 \times 2.27 \times 10^{-3}}{5.72} \right) = 5.22$

➤ On trouve la valeur de la vitesse limite sur le graphique $v_{exp} = f(t)$: $v_{lim} = 40 \text{ cm/s}$ et donc on calcul :

$a = -\frac{b}{v_{lim}} = -\frac{5.22}{0.40} = -13.05$

c. Résolution proprement dite avec Générïs :

E	F
t'	v'
s	m/s
0,00E+00	0,00E+00
2,00E-02	1,27E-01
4,00E-02	2,17E-01
6,00E-02	2,80E-01
8,00E-02	3,24E-01
1,00E-01	3,55E-01
1,20E-01	3,77E-01
1,40E-01	3,93E-01
1,60E-01	4,04E-01
1,80E-01	4,11E-01
2,00E-01	4,17E-01
2,20E-01	4,21E-01
2,40E-01	4,23E-01
2,60E-01	4,25E-01
2,80E-01	4,27E-01
3,00E-01	4,28E-01
3,20E-01	4,28E-01
3,40E-01	4,29E-01
3,60E-01	4,29E-01
3,80E-01	4,29E-01

$=t[1]+0,02$ Scientifique

B	C	D	E	F
X	Y	Y'	t'	v'
m	m	m*s^-1	s	m/s
00E+00	0,00E+00	6,08E-02	0,00E+00	0,00E+00
00E+00	4,56E-03	1,22E-01	2,00E-02	1,27E-01

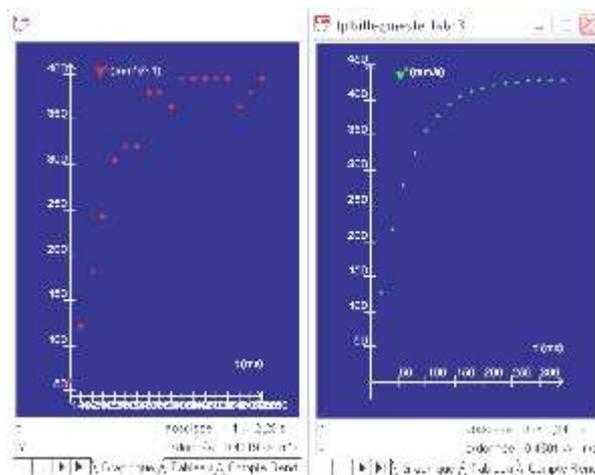
Calcul de t'

$=v[1]+(-14,8*v[1]+6,36)*0,02$ Scientifique

B	C	D	E	F
X	Y	Y'	t'	v'
m	m	m*s^-1	s	m/s
00E+00	0,00E+00	6,08E-02	0,00E+00	0,00E+00
00E+00	4,56E-03	1,22E-01	2,00E-02	1,27E-01

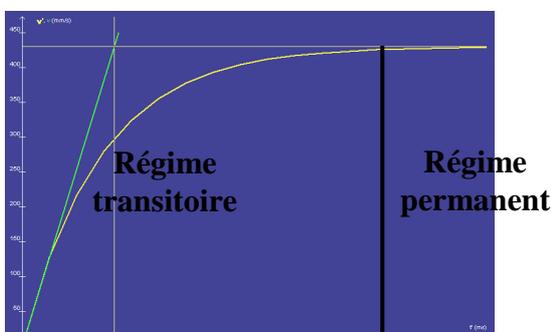
Calcul de v' par Euler

Ces calculs ont été faits avec les valeurs suivantes : $a = -14.8$; $b = 6.36$ et $\delta t = 0.02$



2) Questions :

b. La valeur de v_{lim} est de 43 cm/s. Pour le temps caractéristique on trouve : $\tau_c = 6.8 \times 10^{-2} \text{ s}$



- b. Les deux courbes v_{exp} et v_{th} se correspondent, il y a plus de points aberrants sur la courbe expérimentale.
- c. Puisque la relation $v(t + \delta t) = v(t) + (a \times v(t) + b) \times \delta t$ est d'autant plus vraie que le pas de calcul est petit, les résultats de la modélisation seront d'autant plus précis.