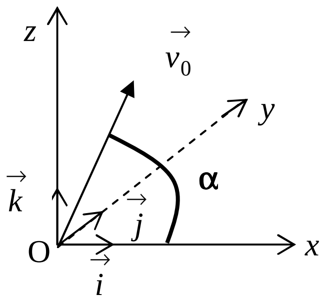
TP N°8-PROF : MOUVEMENT DE PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

I Travail théorique préliminaire :



Un projectile de masse *m*, de centre d'inertie G, est lancé d'un point O, à un instant $t = 0$, avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ ($v_0 = 3{,}5\ \text{m.s}^{-1}$) faisant un angle $\alpha = 80°$ avec l'horizontale.
Les forces exercées par l'air sur le projectile sont négligeables devant le poids $\vec{P}$.

1) D'après la deuxième loi de Newton :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{a_G} \\ or\ \vec{P} = m\vec{g} \end{cases} \quad d'où \quad \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{g} \quad et \quad \begin{cases} ax = 0 \\ ay = 0 \\ az = -g \end{cases}$$

Comme $a_G = \dfrac{dv_G}{dt}$, $v_G(t)\, est\, une\, primitive\, de\, a_G$: $\begin{cases} vx(t) = cte = vx_0 = v_0 \cos\alpha \\ vy(t) = cte = vy_0 = 0 \\ vz(t) = -g*t + cte = -g*t + vz_0 = -g*t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

Comme

$v_G = \dfrac{dOG}{dt}$, $OG(t)\, est\, une\, primitive\, de\, v_G$: $\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha * t + cte = v_0 \cos\alpha * t + x_0 = v_0 \cos\alpha * t \\ y(t) = cte = y_0 = 0 \\ z(t) = -1/2 * g * t^2 + v_0 \sin\alpha * t + cte = -1/2 * g * t^2 + v_0 \sin\alpha * t \end{cases}$

2) Déduction :
   a. On voit que les positions du centre d'inertie du projectile n'évolue en fonction du temps que sur un plan, le plan (x, z) puisque ay = vy = 0 : le mouvement est donc plan.
   b. D'après l'expression de la position x en fonction du temps : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$. On reporte cela dans l'expression de z(t) :

$$\boxed{z(t) = \frac{-1/2 * g}{v_0^{\,2} \cos^2\alpha} \times x^2 + v_0 \tan\alpha \times x}$$

3) L'altitude maximale est atteinte lorsque vz(t) = 0, on cherche z(t)=h qui vérifie cette condition sur la vitesse.

vz(t) = 0 $\Leftrightarrow t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ on reporte dans z(t) : $h = -1/2*g*\dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{g^2} + \dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{g}$

$$\Leftrightarrow \boxed{h = \frac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{2g}}$$

4) La **portée** horizontale, distance entre le point de lancement et le point de chute du projectile sur l'axe correspond à x = d lorsque z(t) = 0.

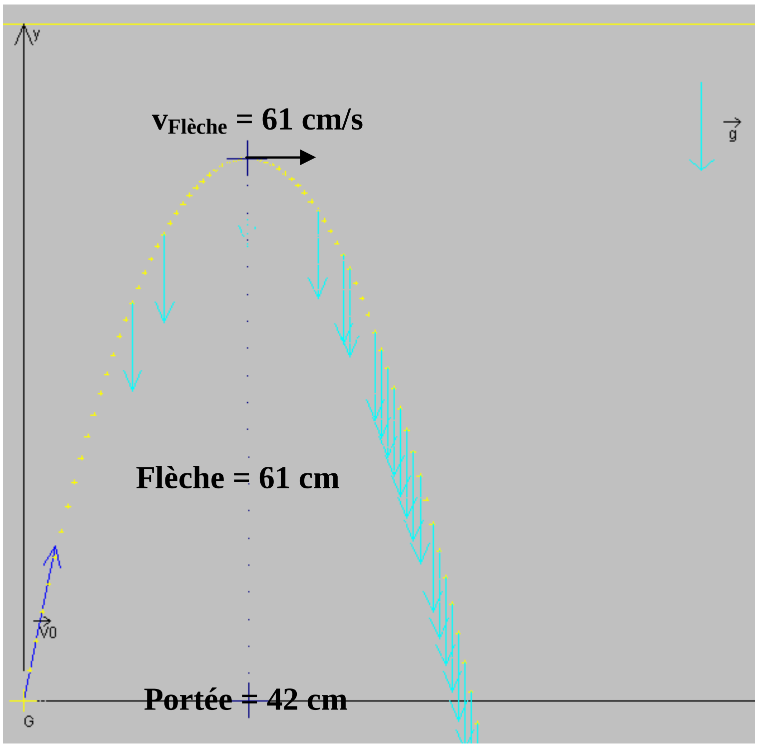
$$z(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha\right) = 0$$

Il y a donc deux solutions possible :
La première est si x = 0 mais alors on est dans l'état initial.

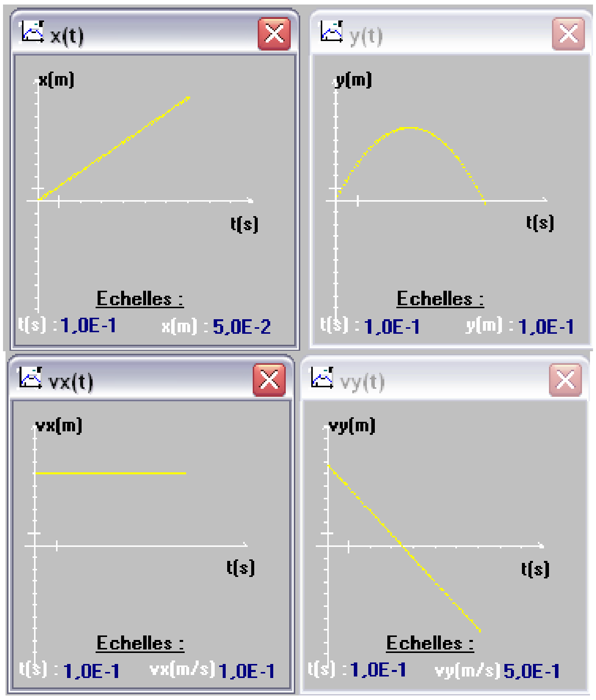
Donc la deuxième solution est la bonne : $d = x = \frac{2{v_0}^2\cos^2\alpha}{g}\times\tan\alpha = \frac{2{v_0}^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\alpha$

(Astuce trigonométrique : 2 sin α cos α = sin 2α)

II Visualisation de la trajectoire du projectile grâce à l'informatique :



- Valeur théorique de la flèche : h = $\frac{{v_0}^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{3.5^2\times(\sin 80)^2}{2*9.8} = 61cm$ OK
- Valeur théorique de la portée : d = $\frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{3.5^2}{9.8}\times\sin(2*80) = 43cm$ OK
- Valeur théorique de la vitesse en haut de la trajectoire : $v_h = v_0\cos\alpha$ = 3.5*cos 80 = 61 cm/s OK
- x(t) fonction affine ?
  - ✓ En effet la fonction x(t) qu est affine puisque sa représentation est une droite passant par l'origine.
  - ✓ Ainsi on vérifie aussi que v_x est constante : on sait que $v_x = dx/dt$, c'est à dire la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe x(t). Cette courbe étant une droite, le coefficient directeur donc la vitesse v_x sont constants.
  - ✓ La valeur de v_x est la même en tout point de la trajectoire donc $v_x = cte = v_h$ 61 cm/s. Le mouvement suivant Ox est uniforme.



- Nature de y(t) et $v_y(t)$:

On voit grâce à ces fenêtres que y(t) est une fonction parabolique.
Le mouvement suivant Oy est d'abord uniformément décélérée (vy(t) droite décroissante >0 : vitesse positive qui décroît) puis uniformément accéléré (vy(t) droite décroissante <0 : la vitesse est négative et elle augmente au cours du temps).

- Angle permettant d'avoir la portée maximale :

On peut raisonner par dichotomie pour retrouver que c'est **un angle de 45°** qui permet d'atteindre la portée maximale