TP N°8-PROF : MOUVEMENT DE PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

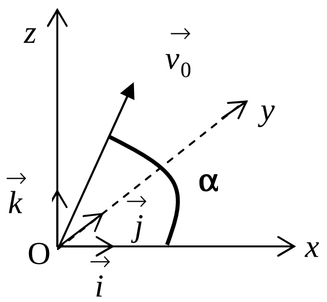
Matériel :

- Un ordinateur muni du logiciel généris 5+
- Un appareil photo numérique permettant d'enregistrer des vidéos ou un caméscope numérique

Objectifs :

- Savoir exploiter un document expérimental reproduisant la trajectoire d'un projectile [chap. 11 – (4)]:
  - ✓ Tracer des vecteurs vitesse et accélération
  - ✓ Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération
  - ✓ Trouver les conditions initiales.
- *Savoir-faire expérimentaux* [chap. 11 – (5)]*:*
  Savoir enregistrer expérimentalement la trajectoire d'un projectile et exploiter le document obtenu.

I Travail théorique préliminaire :



Un projectile de masse *m*, de centre d'inertie G, est lancé d'un point O, à un instant *t* = 0, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.
Les forces exercées par l'air sur le projectile sont négligeables devant le poids $\vec{P}$.

1) D'après la deuxième loi de Newton :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\,\vec{a}_G \\ or\ \vec{P} = m\,\vec{g} \end{cases} \quad d'où \quad \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{g} \quad et \quad \begin{cases} ax = 0 \\ ay = 0 \\ az = -g \end{cases}$$

Comme $a_G = \dfrac{dv_G}{dt}$, $v_G(t)\, est\, une\, primitive\, de\, a_G$:
$$\begin{cases} vx(t) = cte = vx_0 = v_0 \cos\alpha \\ vy(t) = cte = vy_0 = 0 \\ vz(t) = -g*t + cte = -g*t + vz_0 = -g*t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Comme

$v_G = \dfrac{dOG}{dt}$, $OG(t)\, est\, une\, primitive\, de\, v_G$:
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha * t + cte = v_0 \cos\alpha * t + x_0 = v_0 \cos\alpha * t \\ y(t) = cte = y_0 = 0 \\ z(t) = -1/2 * g * t^2 + v_0 \sin\alpha * t + cte = -1/2 * g * t^2 + v_0 \sin\alpha * t \end{cases}$$

2) Déduction :

a. On voit que les positions du centre d'inertie du projectile n'évolue en fonction du temps que sur un plan, le plan (x, z) puisque ay = vy = 0 : le mouvement est donc plan.

b. D'après l'expression de la position x en fonction du temps : t = $\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$. On reporte cela dans l'expression de z(t) :

$$\boxed{z(t) = \frac{-1/2 * g}{v_0^{\,2}\cos^2\alpha} \times x^2 + v_0 \tan\alpha \times x}$$

3) L'altitude maximale est atteinte lorsque vz(t) = 0, on cherche z(t)=h qui vérifie cette condition sur la vitesse.

vz(t) = 0 $\Leftrightarrow$ t = $\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ on reporte dans z(t) : h = -1/2*g* $\dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{g^2} + \dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{g}$

$$\Leftrightarrow \boxed{h = \frac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{2g}}$$

4) La **portée** horizontale, distance entre le point de lancement et le point de chute du projectile sur l'axe correspond à x = d lorsque z(t) = 0.

$$z(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}x + \tan\alpha\right) = 0$$

Il y a donc deux solutions possible :
La première est si x = 0 mais alors on est dans l'état initial.

Donc la deuxième solution est la bonne : $d = x = \dfrac{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}{g} \times \tan\alpha = \dfrac{2v_0^{\,2}}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{v_0^{\,2}}{g}\sin 2\alpha$

(Astuce trigonométrique : 2 sin α cos α = sin 2α)

II Enregistrement et étude de la trajectoire d'un projectile :

6) Calculs des vitesses :

D2 =(((X[3]-X[1])^2+(Y[3]-Y[1])^2)^0,5)/(t[3]-t[1])

	A	B	C	D
Grd	t	X	Y	V
Unité	s	m	m	m/s
1	7,74E+00	0,00E+00	0,00E+00	
2	7,81E+00	1,74E-01	2,52E-01	4,34E+00
3	7,87E+00	3,13E-01	4,87E-01	3,81E+00
4	7,94E+00	4,52E-01	6,78E-01	3,32E+00
5	8,01E+00	6,09E-01	8,17E-01	3,05E+00
6	8,07E+00	7,65E-01	9,39E-01	2,55E+00
7	8,14E+00	8,96E-01	1,00E+00	2,21E+00
8	8,21E+00	1,04E+00	1,03E+00	2,22E+00
9	8,27E+00	1,19E+00	1,02E+00	2,21E+00
10	8,34E+00	1,33E+00	9,65E-01	2,36E+00
11	8,41E+00	1,48E+00	8,87E-01	2,62E+00
12	8,47E+00	1,62E+00	7,65E-01	3,00E+00
13	8,54E+00	1,75E+00	5,91E-01	3,38E+00
14	8,61E+00	1,87E+00	3,91E-01	3,86E+00
15	8,67E+00	2,01E+00	1,48E-01	4,20E+00

On représente les vitesses avec l'échelle 1 cm = 1 m/s

7) Sommet de la trajectoire = vitesse la plus petite : v = 2.21 m/s

8) Pour les vecteurs accélération, on trace graphiquement Δv, on relève leur taille, on convertit en m/s grâce à l'échelle des vitesses, on les divise par 2τ puis en choisissant une échelle d'accélération, on les représente :

Pour a_3 : Δv_3 = 1.1 cm = 1.1m/s d'où a_3 = 1.1/0.13 = 8.46 m/s²

En choisissant une échelle d'accélération : 1cm = 2 m/s², on représente a_3 avec une longueur de 4.23 cm

On trouve les deux valeurs accélération en 3 et en 13 quasiment identiques, de plus, on voit que l'ordre de grandeur est celui du vecteur accélération de la pesanteur : nous avons une chute libre parabolique.

9) Valeur de la flèche : y_{max} = h = 1.04 m
Valeur de la portée : on extrapole la courbe : x_{max} = d = 2.09 m

On a donc d = $\dfrac{2\times v_0^{\,2}}{g}\cos\alpha\sin\alpha = 2.09$ (1) et h = $\dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\alpha}{2g} = 1.04$ (2)

D'après (2) on a $v_0^2 = \dfrac{1.04\times 2g}{\sin^2\alpha}$, on reporte dans (1) :

$2.09 = \dfrac{2}{g}\times\dfrac{1.04\times 2g}{\sin^2\alpha}\times\cos\alpha\times\sin\alpha = \dfrac{4\times 1.04}{\tan\alpha}$ d'où $\tan\alpha = \dfrac{4\times 1.04}{2.09} = 1.99$

Donc α = 63.3° voici notre première condition initiale.
On reporte maintenant cette valeur dans (2) par exemple et on trouve :

$$\boxed{v_0^{\,2} = \frac{1.04\times 2g}{\sin^2\alpha} = 25.6 \Rightarrow v_0 = 5.06 m/s}$$

Voici la deuxième condition !