# Cours d'électrocinétique
## EC2-Bobine et condensateur

## Table des matières

# 1 Introduction

Nous avions donné dans le chapitre EC1 une définition réductrice de ce qu'est un dipôle linéaire (sa caractéristique est une droite).
En réalité, tout dipôle pour lequel $u$ et $i$ sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un dipôle linéaire.

Le cas le plus simple correspond au conducteur ohmique où $u = R\,i$. Nous allons voir ici le cas du condensateur et de la bobine qui sont donc aussi des dipôles linéaires.

# 2 Le condensateur

## 2.1 Constitution et symbole

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant appelé diélectrique.
Ils peuvent être plans, cylindriques voir sphériques.

Les condensateurs sont caractérisés par leur capacité $C$ qui s'exprime en Farad. C'est la capacité qu'ils ont à accumuler des charges lorsqu'ils sont soumis à une certaine différence de potentiel.

L'armature qui reçoit le courant porte la charge $+q$, l'autre porte la charge $-q$.

On symbolisera ainsi le condensateur de la manière suivante :

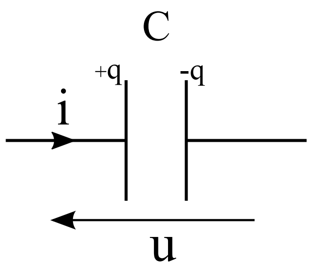


FIGURE 1 – Symbolisation d'un condensateur, convention récepteur

## 2.2 Relation tension-intensité

On connaît la relation entre la charge portée par l'armature positive et la tension appliquée aux bornes du condensateur :

$$q = C\,u \tag{1}$$

On connaît la relation entre l'intensité du courant arrivant sur le condensateur et la variation de charge de l'armature positive :

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{2}$$

D'où :

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}} \tag{3}$$

## 2.3 Comportement du condensateur sous différents régimes

Le condensateur n'est "intéressant" qu'en régime variable, c'est à dire lorsque $u$ varie.

En effet, en régime permanent, la tension étant constante, on a :

$$i = C\frac{du}{dt} = 0 \tag{4}$$

**Le condensateur se comporte donc en régime permanent comme un interrupteur ouvert.**

## 2.4 Énergie emmagasinée par le condensateur

L'énergie emmagasinée par le condensateur entre le temps $t = 0$ où $u = 0$ et le temps $t$ où $u = u$ est donnée par :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}\, C\, u^2} \tag{5}$$

**Attention**, la puissance reçue par un condensateur peut changer de signe au cours du temps :
- Si son énergie $E_C$ augmente, la puissance reçue ($P = u(t)\, i(t)$) est positive est le condensateur se comporte comme un récepteur.
- Si son énergie $E_C$ diminue, la puissance reçue est négative est le condensateur se comporte comme un générateur.

#### Conséquence sur la continuité de la fonction $u(t)$

L'énergie emmagasinée par un condensateur dépend de la tension à ses bornes. Ce transfert d'énergie ne pouvant pas se faire instantanément, la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.

## 2.5 Association de condensateur

### 2.5.1 Association en série

Trois condensateurs de capacité $C_1$, $C_2$, $C_3$ placés en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{eq}$ vérifiant la relation suivante :

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \tag{6}$$

### 2.5.2 Association en parallèle

Trois condensateurs de capacité $C_1$, $C_2$, $C_3$ placés en parallèles sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{eq}$ vérifiant la relation suivante :

$$\boxed{C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3} \tag{7}$$

# 3 La bobine

## 3.1 Constitution et symbole

Une bobine est constituée d'un enroulement de spires conductrices autour d'un isolant. Elle admet donc une certaine résistance interne du fait de cette grande longueur de fil.
La bobine sera donc symbolisée en convention récepteur de la manière suivante :

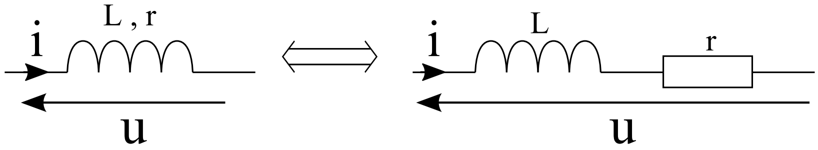


FIGURE 2 – Symbolisation d'une bobine réelle, convention récepteur

## 3.2 Relation tension-intensité

Le phénomène qui caractérise la bobine est l'auto-induction : le passage d'un courant $i$ qui varie dans les spires de la bobine créé un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ qui fait apparaître une tension $u$ aux bornes de celle-ci (phénomène vu plus précisément en 2$^{\text{ème}}$ année).

Mathématiquement, pour une bobine idéale (sans résistance interne), cette auto-induction s'écrit :

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}} \tag{8}$$

où L est l'inductance de la bobine qui s'exprime en Henry (H).

En tenant compte de la résistance interne de la bobine, la tension aux bornes de celle-ci s'écrit :

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt} + r\,i} \tag{9}$$

avec $r$ la résistance interne de la bobine qui s'exprime en Ohm ($\Omega$).

## 3.3 Comportement de la bobine sous différents régimes

La bobine n'est "intéressante" qu'en régime variable, c'est à dire lorsque $i$ varie.

En effet, en régime permanent, l'intensité étant constante, on a :

$$u = L\frac{di}{dt} + r\,i = r\,i \tag{10}$$

**La bobine se comporte donc en régime permanent comme un conducteur ohmique de faible résistance ($r = 10 - 12\,\Omega$).**

## 3.4 Énergie emmagasinée par la bobine

Pour une bobine idéale, l'énergie emmagasinée par celle-ci entre le temps $t = 0$ où $i = 0$ et le temps $t$ où $i = i$ est donnée par :

$$\boxed{E_L = \frac{1}{2}\,L\,i^2} \tag{11}$$

**Attention**, la puissance reçue par une bobine peut changer de signe au cours du temps :

– Si son énergie E augmente, la puissance reçue ($P = u(t)\,i(t)$) est positive est la bobine se comporte comme un récepteur.
– Si son énergie E diminue, la puissance reçue est négative est la bobine se comporte comme un générateur.

Pour une bobine réelle, pendant qu'elle emmagasine l'énergie $E_L$, elle en dissipe aussi par effet Joule.

**Conséquence sur la continuité de la fonction $i(t)$**

L'énergie emmagasinée par une bobine dépend de l'intensité du courant qui la traverse. Ce transfert d'énergie ne pouvant pas se faire instantanément, l'intensité du courant $i(t)$ parcourant une bobine est une fonction continue du temps.

## 3.5 Association de bobines

Les lois d'association en série et en parallèle des bobines sont les mêmes que celles pour les conducteurs ohmiques.

### 3.5.1 Association en série

On peut considérer le cas des bobines réelles :
Une association de $n$ bobines réelles identiques caractérisées par le couple $L, r$ est équivalente à une bobine d'inductance $nL$ associée à un conducteur ohmique de résistance $n\,r$.

### 3.5.2 Association en parallèle

La modélisation en parallèle de bobines réelles n'étant pas aisée, on s'occupe de bobines idéales :
Soit deux bobines idéales d'inductances $L_1$ et $L_2$ placées en parallèle, cette association est équivalente à une bobine d'inductance $L_{\text{eq}}$ qui vérifie :

$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} \tag{12}$$

# 4 Circuits linéaires du premier ordre soumis à un échelon de tension

## 4.1 Différents types de régimes

En électricité, on emploie souvent le terme de régime de fonctionnement : nous allons en rencontrer de différentes sortes et il ne faut pas les confondre.

– Le régime continu et le régime variable sont à opposer :
  – En **régime continu**, toutes les grandeurs électriques sont constantes au cours du temps ;
  – En **régime variable**, ces grandeurs dépendent du temps.

– Le régime transitoire et le régime permanent vont de pair :

- Un **régime est permanent** lorsque pendant un certain temps, les caractéristiques des grandeurs électriques ne sont pas modifiées.
  Le régime continu est un cas particulier de régime permanent.
  Un régime variable peut être permanent : nous verrons le régime sinusoïdal qui est variable (l'intensité et la tension sont des fonctions trigonométriques périodiques), mais comme les caractéristiques de $i(t)$ et $u(t)$ restent les mêmes, ce régime est aussi permanent.
- Un **régime transitoire** est le régime durant lequel on passe d'un régime permanent à un autre.

## 4.2 Échelon de tension

Nous allons soumettre différents circuits à un échelon de tension : on fait passer la tension aux bornes du circuit à étudier d'une valeur $E_1$ à une valeur $E_2$ en un temps très court considéré comme nul.

Pour cela, deux possibilités :
- On ferme ou on ouvre un interrupteur qui relie un générateur de tension continue a u circuit à étudier.
- On utilise un générateur basse fréquence (GBF) qui peut délivrer une tension créneau de fréquence variable.
  Dans ce cas, il faut régler la fréquence du GBF en fonction de ce que l'on souhaite observé (généralement on la règle par rapport à la durée du régime transitoire à observer).

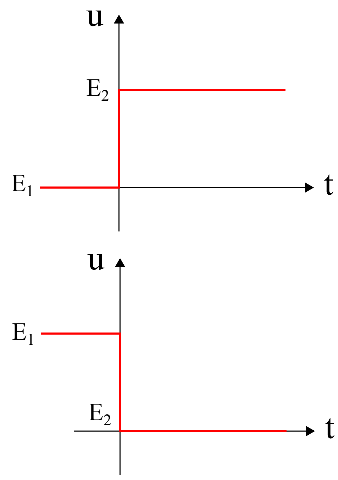


FIGURE 3 – Echelons de tensions

## 4.3 Circuit RC

### 4.3.1 Équation différentielle

On étudie le circuit RC soumis à une tension $E =$ cste, on s'intéresse à l'allure de la tension aux bornes du condensateur et à l'intensité parcourant le circuit.
Initialement, le condensateur est déchargé.
On applique la loi des mailles :

$$E = Ri + u \tag{13}$$

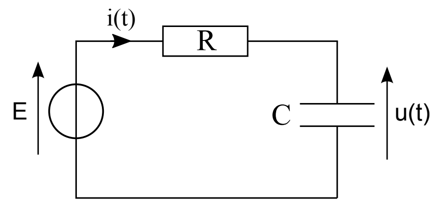


FIGURE 4 – Circuit RC

Or $i = C\dfrac{du}{dt}$, d'où

$$E = RC\frac{du}{dt} + u \tag{14}$$

Équation que l'on peut écrire :

$$\boxed{\tau\frac{du}{dt} + u = E} \tag{15}$$

avec $\tau = RC$.

Cette équation différentielle est du premier ordre, le circuit RC est appelé circuit du premier ordre.

### 4.3.2 Cas de notre étude

La solution de cette équation différentielle sera différente selon le cas étudié.

Pour obtenir la solution la plus générale, on additionne :
– une solution de l'équation homogène associée (sans second membre) qui correspond à la réponse du circuit RC sans excitation : c'est ce que l'on appelle le régime libre ;
– une solution particulière qui correspond au régime permanent.

**On s'intéressera ici au circuit soumis à un échelon de tension : le générateur délivre $E$ pour la charge du condensateur, $0$ pour sa décharge dans la résistance.**

### 4.3.3 Charge du condensateur

On doit trouver une solution à l'équation : $\tau\dfrac{du}{dt} + u = E$.

**Solution de l'équation homogène** On cherche une solution à l'équation homogène de la forme $u_1 = Ae^{\alpha t}$ avec A une constante et $\alpha$ un réel.
Injectons $u_1$ dans l'équation homogène :

$$\tau \times \alpha A e^{\alpha t} + Ae^{\alpha t} = 0 \tag{16}$$

Ce qui donne $\alpha = -\dfrac{1}{\tau}$

**Solution particulière** On cherche une solution particulière $u_2$ constante.
On a $\dfrac{du_2}{dt} = 0$ donc $u_2 = E$.

**Solution globale** elle s'écrit : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$.

**Utilisation de la condition initiale** L'équation différentielle que nous étudions est du premier ordre, une seule condition initiale suffit à trouver la seule constante à déterminer :
A $t = 0$, $u(t) = 0$ donc $A + E = 0$ et $A = -E$.

Finalement, la tension aux bornes du condensateur qui se charge s'écrit :

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \qquad (17)$$

Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction $u(t)$ est bien continue.

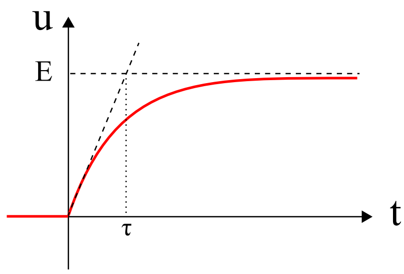

FIGURE 5 – Allure de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge

Comme le montre la figure ci-dessus, la constante de temps $\tau = RC$ peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse de charge du condensateur, plus il est faible plus le condensateur se charge vite.
On dit aussi souvent qu'au bout d'un temps t égal à $5\tau$, le condensateur est totalement chargé. On est passé du régime transitoire au régime permanent.

**Intensité dans le circuit**

On peut facilement obtenir l'équation de l'intensité du courant et son allure.
En effet, $i = C\dfrac{du}{dt}$ d'où :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (18)$$

La fonction $i(t)$ est discontinue.

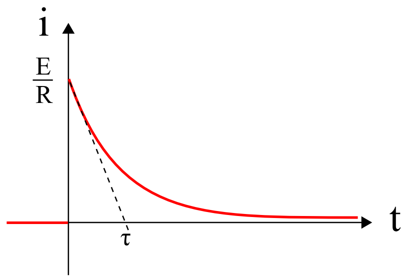

FIGURE 6 – Allure de l'intensité dans le circuit lors de la charge du condensateur

### 4.3.4 Décharge du condensateur

On doit trouver une solution à l'équation : $\tau\dfrac{du}{dt} + u = 0$.

**Solution** On cherche une solution de la forme $u = Ae^{\alpha t}$ avec A une constante et $\alpha$ un réel.
Injectons $u$ dans l'équation :

$$\tau \times \alpha A e^{\alpha t} + A e^{\alpha t} = 0 \qquad (19)$$

Ce qui donne $\alpha = -\dfrac{1}{\tau}$.

La solution s'écrit donc : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

**Utilisation de la condition initiale** A $t = 0$, $u(t) = E$ donc $A = E$.

Finalement, la tension aux bornes du condensateur qui se décharge s'écrit :

$$\boxed{u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{20}$$

Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction $u(t)$ est bien continue.

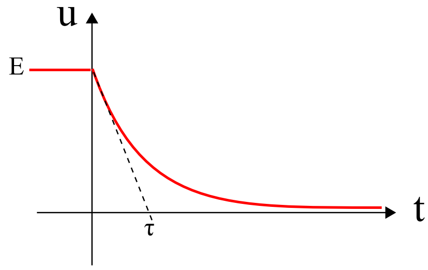


FIGURE 7 – Allure de la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge

**Intensité dans le circuit**

On peut facilement obtenir l'équation de l'intensité du courant et son allure.
En effet, $i = C\dfrac{du}{dt}$ d'où :

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{21}$$

La fonction $i(t)$ est discontinue.

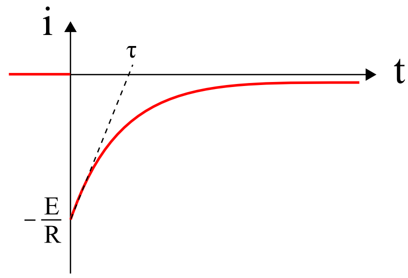


FIGURE 8 – Allure de l'intensité dans le circuit lors de la décharge du condensateur

### 4.3.5 Aspect énergétique

**Cas de la charge**
Reprenons la loi des mailles utilisées pour établir l'équation différentielle concernant la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC :

$$Ri + u = e(t) \tag{22}$$

$$\Longleftrightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \text{; multiplions cette équation par idt :} \tag{23}$$

$$\Longleftrightarrow Ri^2dt + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt = Eidt \tag{24}$$

$$\Longleftrightarrow Ri^2dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = Eidt \tag{25}$$

On reconnaît alors les énergies suivantes :
- La première correspond à l'énergie dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique pendant le temps $dt$ ;
- La deuxième correspond à l'énergie stockée dans le condensateur pendant le temps $dt$ ;

– La troisième correspond à l'énergie fournie par la source de tension pendant le temps $dt$.

On peut intégrer ces énergies infinitésimales sur le temps de charge du condensateur :

– Énergie fournie par le générateur :

$$E_g = \int_0^{5\tau} E i dt = E \int_0^Q dq = EQ = CE^2 \tag{26}$$

car $i = \dfrac{dq}{dt}$ ; pendant la charge du condensateur ; $Q = Cu$ et lorsque le condensateur est chargé $u = E$.

– Énergie stockée dans le condensateur :

$$E_C = \int_0^Q d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CE^2}{2} \tag{27}$$

– Énergie dissipée par effet Joule : comme la moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur, cela signifie que l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique :

$$E_J = \frac{CE^2}{2} \tag{28}$$

**Cas de la décharge**

A l'issue de la charge, le condensateur qui avait accumulée l'énergie $\dfrac{CE^2}{2}$ la restitue intégralement au conducteur ohmique qui la dissipe par effet Joule.

## 4.4 Circuit RL

### 4.4.1 Équation différentielle

On étudie le circuit RL soumis à une tension $e(t)$, on s'intéresse à l'allure de l'intensité dans le circuit et à la tension aux bornes de la bobine. On considère de plus que la bobine est idéale ($r = 0$). On applique la loi des mailles :

$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{29}$$

D'où

$$\boxed{\tau\frac{di}{dt} + i = \frac{e(t)}{R}} \tag{30}$$

avec $\tau = \dfrac{L}{R}$.

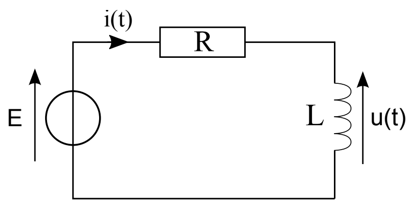


Figure 9 – Circuit RL

Cette équation différentielle est du premier ordre, le circuit RL est appelé circuit du premier ordre.

### 4.4.2 Cas de notre étude

La solution de cette équation différentielle sera différente selon le cas étudié.

Pour obtenir la solution la plus générale, on additionne :

– une solution de l'équation homogène associée (sans second membre) qui correspond à la réponse du circuit RL sans excitation : c'est ce que l'on appelle le régime libre ;
– une solution particulière qui correspond au régime permanent.

On s'intéressera ici au circuit soumis à un échelon de tension, donc la tension e(t) est égale à une constante : E pour l'établissement du courant dans la bobine, 0 pour sa rupture.

### 4.4.3 Établissement du courant

L'équation différentielle concernant le circuit RL (équation (30)) a la même forme que celle pour le circuit RC (équation (15)), la solution de cette équation a la même forme.
On peut donc écrire :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \tag{31}$$

**Utilisation de la condition initiale** On sait que $i(t=0)=0$ soit $A = -\frac{E}{R}$.

La solution s'écrit finalement :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \tag{32}$$

Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction $i(t)$ est bien continue.

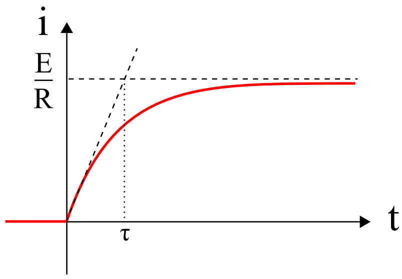


FIGURE 10 – Allure de l'intensité du courant dans un circuit comportant une bobine

Comme le montre la figure ci-dessus, la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse d'établissement du courant, plus il est faible plus le courant s'établit vite.
On dit aussi souvent qu'au bout d'un temps t égal à $5\tau$, on est passé du régime transitoire au régime permanent.

**Tension aux bornes de la bobine**

On peut facilement obtenir l'équation de la tension aux bornes de la bobine et son allure.
En effet, $u = L\frac{di}{dt}$ d'où :

$$\boxed{u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{33}$$

La fonction $u(t)$ est discontinue.

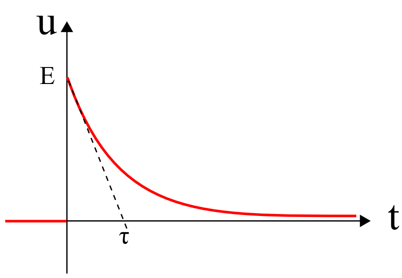


FIGURE 11 – Allure de la tension aux bornes de la bobine lors de l'établissement du courant

### 4.4.4 Rupture du courant

On doit trouver une solution à l'équation : $\tau\dfrac{di}{dt}+i=0$.

Cette équation a la même forme que celle qui concerne la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge, la solution possède donc aussi la même forme :
La solution s'écrit donc : $i(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

**Utilisation de la condition initiale** A $t=0$, $i(t)=\dfrac{E}{R}$ donc $A=\dfrac{E}{R}$.

Finalement, l'intensité dans le circuit lors de la rupture du courant s'écrit :

$$\boxed{i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{34}$$

Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction $i(t)$ est continue.

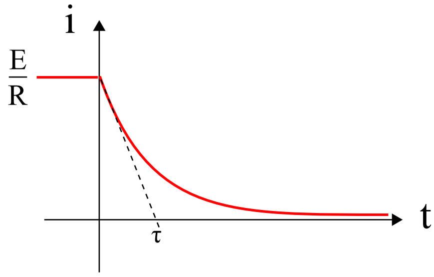


FIGURE 12 – Allure de l'intensité du courant à la rupture du courant dans un circuit comportant une bobine

**Tension aux bornes de la bobine**

On peut facilement obtenir l'équation de la tension aux bornes de la bobine et son allure.
En effet, $u=L\dfrac{di}{dt}$ d'où :

$$\boxed{u(t)=-Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{35}$$

La fonction $u(t)$ est discontinue.

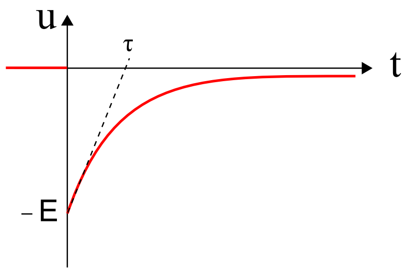


FIGURE 13 – Allure de la tension aux bornes de la bobine lors de la rupture du courant

### 4.4.5 Aspect énergétique

Dans le même principe que ce qui a été fait à propos du circuit RC, on montre que l'énergie que fournit le générateur pendant **l'établissement complet du courant** se partage par moitié dans la bobine où elle est stockée de façon magnétique, l'autre moitié étant dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

A la rupture du courant, la bobine restitue l'énergie précédemment accumulée au conducteur ohmique qui la dissiper une nouvelle fois par effet Joule.