EC3 : circuit RLC série
L'essentiel

Circuit RLC série soumis à une tension : équation différentielle

$$\boxed{LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = e}$$

Circuit RLC en régime libre ou propre : équation différentielle

$$\boxed{LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = 0}$$

Polynôme caractéristique et variables réduites

Résoudre cette équation différentielle revient à trouver les solutions du polynôme caractéristique associé :

$$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$$

On peut exprimer ce polynôme en fonction de variables dites réduites :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Les variables réduites sont :

- ω_0 est la pulsation propre des oscillations en l'absence des frottements, elle s'exprime en $rad.s^{-1}$: $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$
- λ est le facteur d'amortissement, exprimé en s^{-1} : $\boxed{\lambda = \frac{R}{2L}}$
- α est le coefficient d'amortissement, sans dimension : $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$

Facteur de qualité

Pour caractériser le circuit RLC série, on utilise souvent le facteur de qualité Q :

$$\boxed{Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$$

Existence de différents régimes

Les solutions du polynôme caractéristique dépendent de la valeur de son discriminant.
Le discriminant pouvant être soit positif, soit négatif, soit nul, le polynôme admet trois types de solutions, l'équation différentielle associée au polynôme également.

Ces trois types de solutions définissent trois régimes de fonctionnement pour le circuit RLC série libre.

On utilisera ici le discriminant réduit du polynôme qui a pour expression :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 \quad \text{ou} \quad \Delta' = \omega_0^2(\alpha^2 - 1)$$

Régime apériodique : $\Delta' > 0$

Relation entre les variables réduites

Si $\Delta' > 0$ alors $\lambda > \omega_0$, $\alpha > 1 \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \iff \boxed{Q < \frac{1}{2}}$

Racines du polynôme caractéristique

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\alpha\omega_0 - \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$$
$$r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Solution générale de l'équation différentielle

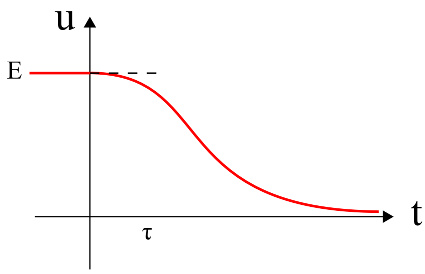
$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Et lorsque les constantes sont déterminées :

$$\boxed{u(t) = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} - \frac{r_1 E}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}}$$

Allure de la tension

En régime apériodique, il n'y a pas d'oscillations électriques.



Régime critique : $\Delta' = 0$

Relation entre les variables réduites

Si $\Delta' = 0$ alors $\lambda = \omega_0$, $\alpha = 1 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C \iff \boxed{Q = \frac{1}{2}}$

Racines du polynôme caractéristique

Le polynôme admet une racine double négative, on a :

$$r_1 = -\lambda = -\omega_0$$

Solution générale de l'équation différentielle

$$u(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\lambda t}$$

Et lorsque les constantes sont déterminées :

$$\boxed{u(t) = E(\lambda t + 1)e^{-\lambda t}}$$

Allure de la tension

Elle est la même que celle du régime apériodique puisque le régime critique est le premier régime apériodique (retour à l'équilibre le plus rapide).

Régime pseudo-périodique : $\Delta' < 0$

Relation entre les variables réduites

Si $\Delta' < 0$ alors $\lambda < \omega_0$, $\alpha < 1 \Longleftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Longleftrightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$

Racines du polynôme caractéristique

Le polynôme admet deux racines complexes conjuguées. Si on pose $\omega^2 = -\Delta'$, on a :

$$r_1 = -\lambda - j\omega \qquad\qquad r_2 = -\lambda + j\omega$$

Le j est la notation complexe utilisée en physique pour ne pas confondre le nombre complexe classique avec l'intensité du courant.

Solution générale de l'équation différentielle

$$u(t) = (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t))e^{-\lambda t}$$

ou :

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi)e^{-\lambda t}$$

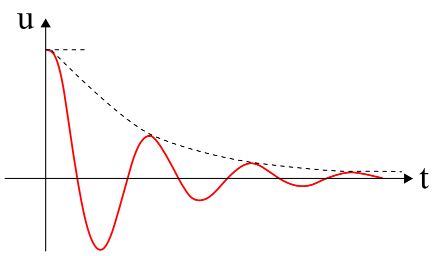
Et lorsque les constantes sont déterminées :

$$\boxed{u(t) = E(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t))e^{-\lambda t}}$$

Cette solution se découpe en deux parties :
- Une partie oscillante à la pulsation ω ;
- Une amplitude décroissance de manière exponentielle.

Allure de la tension

Dans ce régime, il y a bien oscillations électriques.

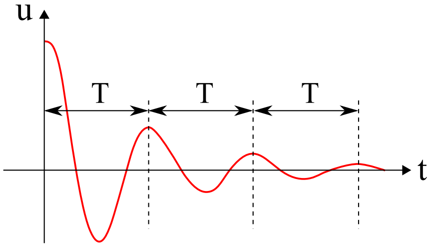


Pseudo-période des oscillations

On observe donc des oscillations électriques à la pulsation ω, donc de pseudo-période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}}}$$

On parle de pseudo-période car l'amplitude décroît.



La pseudo-période est voisine mais plus grande que la période propre du circuit (celle qui correspond à un circuit non amorti (R=0)).
Plus l'amortissement est fort ($\alpha \nearrow$), plus la pseudo-période s'éloigne de la période propre.