EC4 : régime sinusoïdal
L'essentiel

Forme graphique et mathématiques d'une grandeur sinusoïdale

$$\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)}$$

où X_m est l'amplitude, ω la pulsation et ϕ la phase à l'orgine de la grandeur.

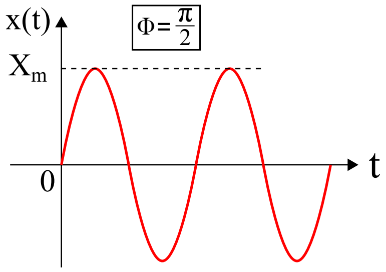

FIGURE 10 – Signal sinusoïdal

Relations entre la pulsation, la période et la fréquence

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad \boxed{\omega = 2\pi f} \qquad \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Déphasage entre deux signaux

On considère toujours le déphasage entre deux signaux synchrones, c'est à dire de même fréquence.

Ce déphasage varie entre 0 et π et peut être positif ou négatif.

Si on considère par exemple le déphasage de V_S par rapport à V_E :
- Le déphasage est positif si V_S est en avance par rapport à V_E (sur un oscillogramme $V = f(t)$, le tracé représentant V_S commence celui avant V_E) ;
- Le déphasage est négatif si V_S est en avance par rapport à V_E.

Forme complexe d'un signal sinuoïdal

Soit un signal sinusoïdal d'expression mathématique $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, on lui associe une grandeur complexe :

$$\boxed{\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\phi}}$$

On définira également une amplitude complexe :

$$\boxed{\underline{X} = X_m e^{j\phi}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}}$$

Lien entre grandeur complexe et grandeurs réelles

Pour retourner au signal réel complet :

$$\boxed{x(t) = Re(\underline{x}(t))}$$

Retour à l'amplitude du signal réel :

$$\boxed{X_m = |\underline{X}| = |\underline{x}(t)|}$$

Retour à la phase initiale :

$$\boxed{\phi = Arg(\underline{X})}$$

Toutes les informations dont nous avons besoin pour reconstituer le signal réel (amplitude et phase à l'origine sont contenues dans l'amplitude complexe.

Représentation de Fresnel

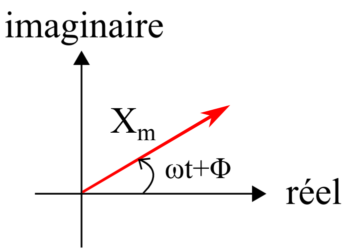

FIGURE 11

Dérivation de signaux complexes

$$\boxed{\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega\underline{x}(t)}$$

Intégration de signaux complexes

$$\boxed{\int \underline{x}(t) = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)}$$

Notation complexe et régime forcé : étude du dipôle RC

On cherche $u(t)$ aux bornes du condensateur.
On peut écrire la loi des mailles en notation complexe :

$$\boxed{\underline{u}(t) + R\,\underline{i}(t) = Ee^{j(\omega t)}}$$

Or $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$ donc $\underline{i}(t) = C\dfrac{d\underline{u}(t)}{dt} = jC\omega\underline{u}(t)$ (la relation entre $\underline{i}(t)$ et $\underline{u}(t)$ est linéaire).

Elle devient simplement :

$$\boxed{\underline{u}(t) = \frac{Ee^{j(\omega t)}}{1 + jRC\omega}}$$

Intérêt des complexes : il n'y a plus d'équation différentielle à résoudre.

On obtient l'amplitude de $u(t)$ en calculant le module de $\underline{U}$:

$$\boxed{U = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}}$$

Et la phase à l'origine de $u(t)$ en prenant l'argument $\underline{U}$:
Attention, pour obtenir cette phase, il faut calculer la tangente et connaître le signe du cosinus.
On obtient :

$$\boxed{\tan\phi = -\tau\omega}$$

et

$$\boxed{\cos\phi = \frac{\dfrac{E}{1+(\tau\omega)^2}}{|\underline{U}|} > 0}$$

Donc on peut écrire :

$$\boxed{\phi = \arctan(-\tau\omega)}$$

Finalement :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t - \arctan(\tau\omega))}$$

Impédance et Admittance complexe

Impédance complexe :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}}$$

Admittance complexe :

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}}$$

Impédance des dipôles linéaires

Résistance :

$$\boxed{\underline{Z} = R}$$

Condensateur :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}}$$

Le condensateur se comporte en basses fréquences comme un interrupteur ouvert, en hautes fréquences comme un interrupteur fermé. Bobine :

$$\boxed{\underline{Z} = jL\omega}$$

La bobine se comporte en basses fréquences comme un interrupteur fermé, en hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

Loi d'ohm en notation complexe

$$\boxed{\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}}$$

Impédance complexe et grandeurs réelles

- Le module de l'impédance complexe donne le rapport de l'amplitude de la tension par l'amplitude de l'intensité ;
- L'argument de l'impédance complexe donne le déphasage (avance de phase) entre la tension u(t) et l'intensité i(t).

Condensateur, bobine et déphasage

- Une bobine introduit un déphasage de $\pi/2$ entre la tension et l'intensité ;
- Un condensateur introduit un déphasage de $-\pi/2$ entre la tension et l'intensité.

Lois en notation complexe

Les lois vues dans le chapitre EC1 sont valables pour les grandeurs complexes : association d'impédances, loi des noeuds, loi des mailles, ponts diviseurs, ...

Valeur efficace d'un signal

Pour un signal quelconque :

$$X_{\text{eff}}^2 =< x(t)^2 >= \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Dans le cas d'une grandeur sinusoïdale :

$$\boxed{X_{\text{eff}} = \frac{X_{\text{m}}}{\sqrt{2}}}$$

Puissance instantanée

La formule générale est :

$$\boxed{p(t) = u(t) \times i(t)}$$

Si $u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi')$:

$$p(t) = \frac{U_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \left(\cos(2\omega t + \phi + \phi') + \cos(\phi - \phi')\right)$$

Puissance moyenne

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$\boxed{P = \frac{U_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \cos \Delta\phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \Delta\phi}$$

Le terme $\cos \Delta\phi$ est appelé **facteur de puissance**.