

# Cours d'électrocinétique

## EC5-Résonance du circuit RLC série

### 1 Introduction

Ce chapitre sera l'occasion de reprendre en partie les contenus des deux chapitres précédents : à l'aide de la notation complexe, nous allons étudier le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, c'est à dire soumis à une tension du type  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .

Lorsque l'on parle de circuit RLC série, nous n'indiquons pas dans quel ordre les composants vont être reliés. On distinguera ici deux cas, ceux-ci seront présentés dans le premier paragraphe.

Nous verrons alors que le montage RLC série peut-être étudié en tension ou en intensité et qu'il y a donc existence de deux types de résonances aux caractéristiques différentes.

### 2 Présentation des deux montages étudiés

#### 2.1 Étude de la tension aux bornes du condensateur

Le premier montage est celui où l'on enregistre la tension aux bornes du condensateur, comme dans l'étude du régime libre du RLC série.

Dans celui-ci, on étudie en réalité la charge  $q$  du condensateur ( $u_C = \frac{q}{c}$ ).

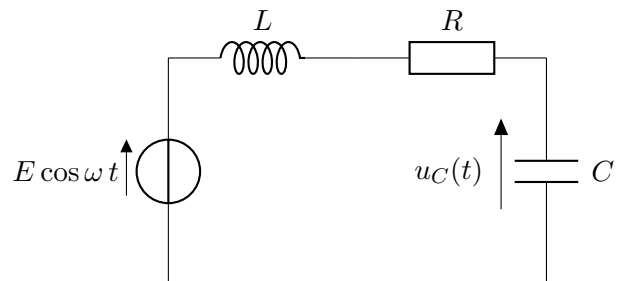


FIGURE 1 – Circuit RLC série en régime forcé-Etude de la tension aux bornes du condensateur

## 2.2 Étude de l'intensité dans le circuit via la tension aux bornes du conducteur ohmique

On peut également enregistrer la tension aux bornes du conducteur ohmique, mais dans ce cas il faut intervertir condensateur et conducteur ohmique pour ne pas avoir de problème de masse.

Cette tension est l'image de l'intensité du courant, à R près ( $u_R = R \times i$ ).

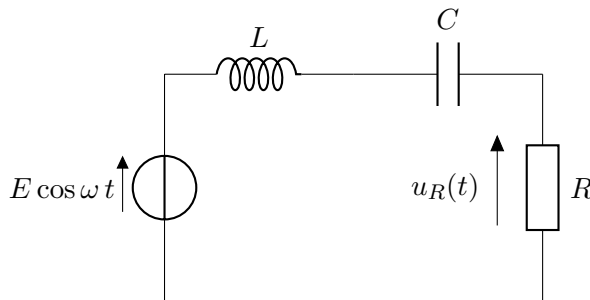


FIGURE 2 – Circuit RLC série en régime forcé-Etude de la tension aux bornes du condensateur

## 3 Etude de la tension aux bornes du condensateur

### 3.1 Équation différentielle, régime transitoire, régime permanent

Si l'on étudie classiquement le circuit de la figure 1, on établit l'équation différentielle vérifiée par  $u_C(t)$  à l'aide de la loi des mailles ; on obtient :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \cos \omega t \quad (1)$$

La solution de cette équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène (équation différentielle avec second membre nul) et d'une solution particulière.

On rappelle que :

- La **solution de l'équation homogène** correspond au **régime transitoire** ;
- La **solution particulière** correspond au **régime permanent**.

Nous connaissons la forme du régime transitoire puisqu'il a été étudié dans le chapitre EC3, de plus celui-ci est souvent bref.

Le but étant ici d'étudier le régime forcé (c'est dans celui-ci que l'on peut observer la résonance), **on ne s'intéressera qu'à la solution particulière**.

### 3.2 Solution particulière et notation complexe

Pour exprimer cette solution, on utilise le diviseur de tension en notation complexe sur la figure 1. On a ainsi :

$$u_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} e(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} e(t) = \frac{e(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (2)$$

Toutes les informations pour caractériser le signal réel sont contenues dans l'amplitude complexe définie par :

$$\underline{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (3)$$

Intéressons-nous à l'amplitude du signal réel et à son déphasage (déphasage de  $u_C(t)$  par rapport à  $e(t)$ ) :

### 3.2.1 Amplitude

L'amplitude de  $u_C(t)$  est donnée par le module de l'amplitude complexe :

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}} \quad (4)$$

On peut introduire dans cette expression les variables réduites, vues en partie dans le chapitre EC3 : soit  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre du circuit, on définit une grandeur sans dimension  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  ; on utilise également le facteur de qualité :  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Ce qui donne :

$$\boxed{U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}} \quad (5)$$

### 3.2.2 Déphasage

Pour obtenir  $\phi$ , on prend l'argument de  $\underline{U}_C$ . Celui-ci vaut :

$$\phi = \text{Arg}(\underline{U}_C) = \text{Arg}\left(\frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\right) \quad (6)$$

$$= \text{Arg}(E) - \text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \quad (7)$$

$$= -\text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \quad (8)$$

#### Attention !

On serait tenté d'écrire  $\tan \phi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$  et de regarder le signe de  $\cos \phi$  avant de prendre l'arc-tangente. Mais le signe de ce cosinus dépend de la fréquence (de la pulsation) puisque il dépend de  $1 - LC\omega^2$ .

Ainsi, si on utilise l'équation (8), on obtient deux expressions du déphasage selon la fréquence considérée.

#### Solution

On peut néanmoins se ramener à une seule expression à l'aide d'une petite astuce. On modifie l'équation (8) de la manière suivante :

$$\phi = -\text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \quad (9)$$

$$= -\text{Arg}(j(RC\omega - j(1 - LC\omega^2))) \quad (10)$$

$$= -\text{Arg}(j) - \text{Arg}((RC\omega - j(1 - LC\omega^2))) \quad (11)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-(1 - LC\omega^2)}{RC\omega}\right) \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{(1 - LC\omega^2)}{RC\omega}\right) \quad (13)$$

En effet avec cette astuce et sachant que  $\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$ , on fait apparaître l'argument d'un nombre complexe dont la partie réelle est positive, donc le cosinus de l'argument de ce complexe est positif et on peut écrire  $\phi' = \arctan(\cdot)$ .

On peut alors introduire les variables réduites :

$$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}}\right)} \quad (14)$$

### 3.3 Étude du phénomène de résonance

Cette étude consiste à tracer, en fonction de la pulsation d'excitation  $\omega$  (ou de la fréquence) ou en fonction de notre variable réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , le comportement de l'amplitude du signal  $u_C(t)$  et de son déphasage par rapport à  $e(t)$ .

#### 3.3.1 Étude de l'amplitude

$$\text{Rappelons l'expression de celle-ci : } U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Si on veut connaître le sens de variation de  $U_C$ , on peut se référer à celui de

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2.$$

Comme  $U_C = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$  et que la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est croissante,  $U_C$  varie de manière inverse à  $f(x)$ .

#### Étude de la fonction $f(x)$

Pour étudier celle-ci, il nous faut sa dérivée :

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = -4x + 4x^3 + \frac{2x}{Q^2} = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right) \quad (15)$$

Cette dérivée s'annule pour  $x = 0$  et pour  $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0$ .

Cette deuxième condition implique que  $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  si et seulement si  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$  soit  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

On distingue alors deux cas :

#### Cas d'un petit facteur de qualité : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La dérivée  $f'(x)$  ne s'annule que pour  $x = 0$ ,  $f(x)$  est croissante ( $4x$  croissant et  $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}$  croissant) de  $]0, +\infty[$ .

Donc la fonction d'amplitude  $U_C$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Ces limites sont :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow 0} U_C &= E; \\ - \lim_{x \rightarrow +\infty} U_C &= 0; \end{aligned}$$

L'allure de cette fonction est donc dessinée ci-contre.

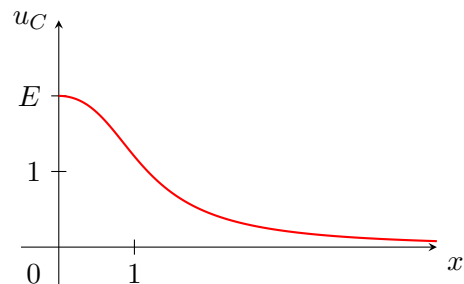


FIGURE 3 – Pas de résonance en tension aux bornes du condensateur lorsque  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

**Remarque : rappels mathématiques**

Un polynôme du second degré est du même signe que son "a" partout, sauf entre les racines.

**Cas d'un grand facteur de qualité :  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$**

Cette fois  $f'(x)$  possède deux racines,  $x = 0$  et  $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ , racine du polynôme du second degré contenu dans  $f'(x)$ .

$f'(x)$  est du signe du polynôme du second degré, donc du signe du "a" de ce polynôme partout sauf entre les racines. On sait aussi que  $U_C$  varie de façon inverse à  $f(x)$ .

Du coup, on peut dresser le tableau de variation suivant :

| x       | 0 | $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$             | $+\infty$    |
|---------|---|---|--------------|
| $f'(x)$ |   | -   | +            |
| $f(x)$  |   | Décroissante                                | Croissante   |
| $U_C$   |   | Croissante                                  | décroissante |
|         |   | $U_{\max} = \frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$ |              |

Il y a donc un maximum d'amplitude pour  $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ , **c'est ce phénomène que l'on appelle résonance en tension.**

**A la résonance,  $U_C$  est maximum et est supérieure à E : c'est ce que l'on appelle la surtension.**

De plus, les limites de  $U_C$  sont les mêmes que pour le cas précédent.

Dessignons l'allure de l'amplitude  $U_C$  en fonction de x pour plusieurs valeurs de facteur de qualité :

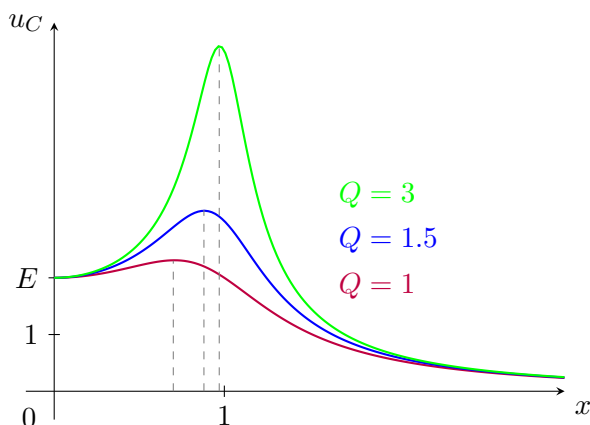


FIGURE 4 – Résonance de la tension aux bornes du condensateur en fonction de la pulsation et du facteur de qualité

Nous observons que :

- La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand ;
- Plus ce facteur est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit (puisque  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  tend vers 1) en restant toujours inférieure à elle ;
- La surtension est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.

### 3.3.2 Étude de la phase

Rappelons son expression :  $\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1-x^2}{\frac{x}{Q}}\right)$

— Appelons  $f(x) = \left(\frac{1-x^2}{\frac{x}{Q}}\right) = Q\left(\frac{1}{x} - x\right)$  ;

— Calculons sa dérivée :  $f'(x) = Q\left(\frac{-1}{x^2} - 1\right) = -Q\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)$  ;

—  $f'(x)$  est négative quelque soit  $Q$ , la fonction  $f(x)$  est donc décroissante ;

— La fonction  $\arctan(x)$  étant croissante, au final  $\phi$  décroît.

Calculons également les limites de  $\phi$  :

—  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi = \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1-x^2}{\frac{x}{Q}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

—  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi = \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{1-x^2}{\frac{x}{Q}}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

Et enfin, on peut regarder quelle est la valeur de  $\phi$  lorsque  $x = 1$  soit  $\omega = \omega_0$  :

$$\phi(x=1) = -\frac{\pi}{2}$$

Tout ceci nous donne une bonne idée de l'allure de la courbe de phase que voici :

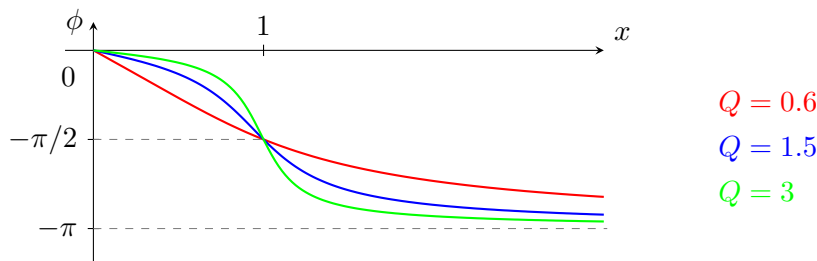


FIGURE 5 – Évolution du déphasage en fonction de la fréquence et du facteur de qualité

**En résumé**

1. Il y a résonance en tension aux bornes du condensateur si et seulement si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
Dans ce cas :
  - La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand ;
  - Plus ce facteur est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit en restant toujours inférieure à celle-ci ;
  - La surtension (fait que  $U_{max} > E$ ) est d'autant plus importante que le facteur de qualité est grand.
2. Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la tension aux bornes du condensateur n'admet pas d'autre maximum que  $E$  en  $x = 0$  et tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini.
3. La déphasage  $\phi$  de la tension aux bornes du condensateur sur la tension d'entrée varie de 0 à  $-\pi$  et est égale à  $\frac{\pi}{2}$  à la résonance lorsqu'elle existe.

## 4 Étude de l'intensité

### 4.1 Obtention de l'intensité à partir de la tension aux bornes du condensateur

Pour cette étude, nous nous servons de la relation entre la tension aux bornes du condensateur, que nous venons de déterminer, et l'intensité du courant.

En effet, on a :  $i = C \frac{du_C}{dt}$  en convention récepteur.

Ainsi, si la tension aux bornes du condensateur est la somme d'une tension correspondant au régime transitoire et d'une tension correspondant au régime permanent (forcé), il en est de même pour l'intensité.

Comme nous l'avons dit précédemment, on ne s'intéresse qu'au régime forcé.

### 4.2 Solution particulière et notation complexe

Passons alors en notation complexe pour écrire l'intensité complexe pendant le régime forcé :

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \underline{u} \quad (16)$$

On a donc directement  $\underline{i}$  à partir de  $\underline{u}$  :

$$\underline{i} = jC\omega \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (17)$$

Ainsi que son amplitude complexe :

$$\underline{I} = jC\omega \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (18)$$

A partir d'elle, on va pouvoir considérer :

#### 4.2.1 Amplitude de l'intensité réelle

On prend alors le module de l'amplitude complexe :

$$I = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}} \quad (19)$$

On passe alors en variable réduite :

$$I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad (20)$$

Étudions-la :

- On pose  $f(x) = 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$  ;
- On calcule sa dérivée :

$$f'(x) = 2Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \quad (21)$$

- Cette dérivée s'annule pour  $x = 1$ , elle est négative dans l'intervalle  $]0, 1[$  et positive dans l'intervalle  $]1, +\infty[$  ;
- La fonction  $f(x)$  est donc décroissante dans l'intervalle  $]0, 1[$  et croissante dans l'intervalle  $]1, +\infty[$  ;
- Comme la fonction  $\sqrt{\quad}$  est croissante, la fonction  $I(x)$  varie inversement à la fonction  $f(x)$  et est croissante dans l'intervalle  $]0, 1[$  et décroissante dans l'intervalle  $]1, +\infty[$  ;
- Ceci impose que  $I(x)$  admet un maximum en  $x = 1$  et que ce maximum vaut  $\frac{E}{R}$ .

#### En résumé

Il y a donc toujours résonance en intensité quelque soit la valeur du facteur de qualité, cette résonance a toujours lieu pour  $\omega = \omega_0$  et le maximum atteint a toujours la valeur  $\frac{E}{R}$ .



Voici les courbes que l'on peut obtenir :

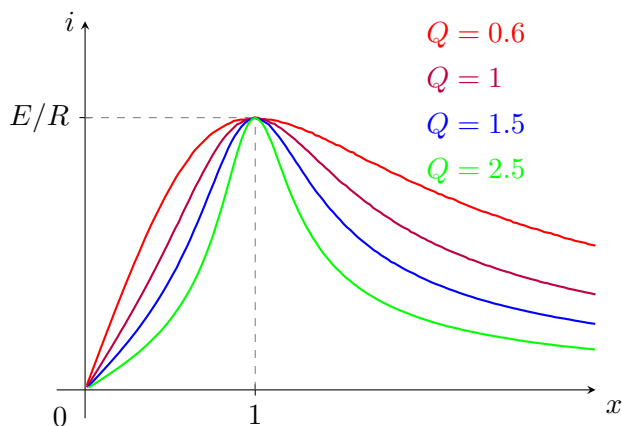


FIGURE 6 – Résonance de l'intensité en fonction de la pulsation et du facteur de qualité

#### 4.2.2 Phase de l'intensité réelle

Reprenons l'expression (16) et faisons apparaître les phases :

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \underline{u} \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow I e^{j\phi'} e^{j\omega t} = jC\omega U_C e^{j\phi} e^{j\omega t} \quad (23)$$

Si on pose  $I = C\omega U_C$ , on a :

$$e^{j\phi'} = j e^{j\phi} \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow e^{j\phi'} = e^{\frac{\pi}{2}} e^{j\phi} \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \phi' = \frac{\pi}{2} + \phi \quad (26)$$

Nous pouvons donc déduire la phase de  $i(t)$  de la phase de  $u(t)$ , les courbes obtenues sont de même forme mais décalé vers le haut de  $\pi/2$  :

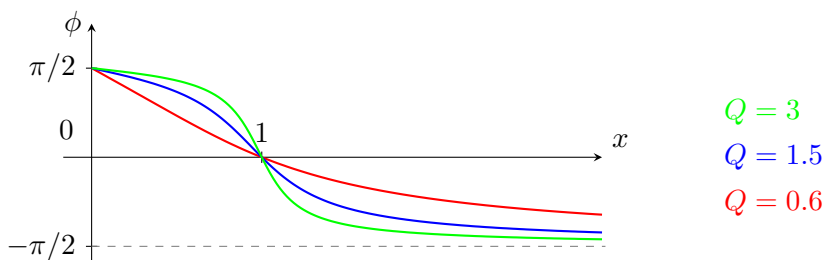


FIGURE 7 – Évolution du déphasage de l'intensité en fonction de la fréquence et du facteur de qualité

## 5 Étude de l'impédance

Cette étude, plutôt qualitative va nous permettre de voir le comportement du circuit en fonction de la fréquence et du déphasage de la tension du générateur par rapport à l'intensité .

L'impédance complexe du circuit a pour expression :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \quad (27)$$

Donc une impédance réelle (module de l'impédance complexe) égale à :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (28)$$

Que se passe-t-il en fonction de la fréquence ?

- En basse fréquence,  $\omega \rightarrow 0$ , l'impédance tend vers l'infini à cause de la partie capacitive : cela induit également un déphasage de  $-\pi/2$  entre la tension et l'intensité (un retard de la tension par rapport à l'intensité ;
- En haute fréquence,  $\omega \rightarrow \infty$ , l'impédance tend également vers l'infini à cause de la partie inductive : cela induit un déphasage de  $\pi/2$  entre la tension et l'intensité ;
- A la résonance, lorsque  $\omega = \omega_0$ , les parties capacitive et inductive se compensent, et l'impédance est une résistance : il n'y a pas de déphasage entre tension et courant.