

EM0 : outils mathématiques

L'essentiel

Elément infinitésimaux en coordonnées cartésiennes

Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Surface élémentaire

$$dS = dx \times dy$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dx \times dy \times dz$$

Elément infinitésimaux en coordonnées cylindriques

Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Surface élémentaire

$$dS = dr \times r d\theta$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dr \times r d\theta \times dz$$

Elément infinitésimaux en coordonnées sphériques

Déplacement élémentaire

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Surface élémentaire

$$dS = r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cos \theta$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad y = r \sin \theta$$

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \qquad \vec{u}_x = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \qquad \vec{u}_y = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$$

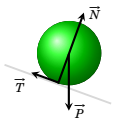
Gradient d'un champ scalaire

Si on applique l'opérateur nabla directement sur un champ de scalaire, on obtient le gradient de ce champ : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} V = \overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

On peut l'exprimer en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} V = \overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$



Divergence d'un champ vectoriel

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel donne naissance à la divergence : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

Le produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs donne naissance au rotationnel de ce vecteur : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$