EM0 : outils mathématiques
L'essentiel

Elément infinitésimaux en coordonnées cartésiennes

Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

Surface élémentaire

$$dS = dx \times dy$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dx \times dy \times dz$$

Elément infinitésimaux en coordonnées cylindriques

Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

Surface élémentaire

$$dS = dr \times rd\theta$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dr \times rd\theta \times dz$$

Elément infinitésimaux en coordonnées sphériques

Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\sin\theta d\phi\,\overrightarrow{e_\phi}$$

Surface élémentaire

$$dS = rd\theta \times rsin\theta d\phi$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dr \times rd\theta \times rsin\theta d\phi$$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \qquad \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_x} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{e_y} = \sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

Gradient d'un champ scalaire

Si on applique l'opérateur nabla directement sur un champ de scalaire, on obtient le gradient de ce champ : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} V = \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$$

On peut l'exprimer en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} V = \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$$

Divergence d'un champ vectoriel

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel donne naissance à la divergence : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\, \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

Le produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs donne naissance au rotationnel de ce vecteur : en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$