Cours d'électromagnétisme
EM12-Potentiel et énergie électrostatique

Table des matières

1 Introduction

Nous allons définir dans ce chapitre une grandeur scalaire intimement lié au champ électrostatique : le potentiel électrostatique. Cette grandeur permet de caractériser le champ électrostatique et est parfois plus simple à exploiter. De plus, ce potentiel sera relié, par l'intermédiaire du travail de la force de Coulomb, à l'énergie potentielle électrostatique ce qui lui donnera toute sa signification physique.

2 Circulation du champ électrostatique

2.1 Définition

On appelle circulation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ entre A et B la grandeur :

$$\boxed{C_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}} \qquad (1)$$

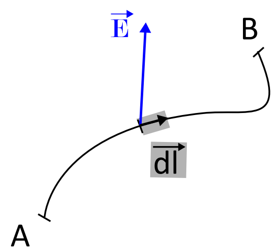

FIGURE 1 – Circulation du champ électrostatique le long d'un chemin

2.2 Conservation de la circulation du champ électrostatique

La grandeur définie précédemment ne dépend que des positions des points A et B, la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ est donc **indépendante du chemin suivi** :
On dit que la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ est conservative.
C'est un principe et comme tout principe, il ne se démontre pas.

Ceci implique que :

$$\boxed{\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0} \qquad (2)$$

La circulation du champ $\overrightarrow{E}$ le long d'une courbe fermée est nulle.

3 Potentiel électrostatique

3.1 Définition

Vue que la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas du chemin suivi, on peut définir une grandeur scalaire V telle que :

$$\boxed{\int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V(A) - V(B)} \qquad (3)$$

Cette grandeur V est appelée potentiel électrique et s'exprime en Volt.

3.2 Propriétés

– L'équation 3 de définition du potentiel électrique faisant intervenir une intégrale, le potentiel électrique est défini à une constante près (constante d'intégration).

  On fixera arbitrairement l'origine des potentiels (cela ne modifiera en rien le champ électrostatique).

– Puisque le champ électrostatique vérifie le principe de superposition, le potentiel électrostatique est additif : le potentiel créé par la réunion de deux systèmes de charges est la somme des potentiels créés par chaque système.

3.3 Remarques

– La différence de potentiel n'est autre que la tension que l'on connaît en électricité.

– Pour fixer les idées sur la circulation du champ électrique qui donne naissance au potentiel, on peut faire une analogie avec la mécanique :
  Si on considère que le champ électrique est analogue à une force conservative comme le poids $\overrightarrow{P}$, la circulation de $\overrightarrow{E}$ est analogue au travail de la force $\overrightarrow{P}$. Le travail du poids est égal à la différence d'énergie potentielle comme la circulation de $\overrightarrow{E}$ est égale à la différence de potentiel électrique.

4 Exemples de potentiel électrostatique

4.1 Calcul du potentiel créé par une charge ponctuelle à partir du champ électrostatique

Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle a été défini dans le chapitre EM11 :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \tag{4}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} \quad \text{si on se place en coordonnées sphériques.} \tag{5}$$

Calculons la circulation de ce champ entre deux points A et B quelconques :

$$\int_A^B \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}\cdot\overrightarrow{dl} \tag{6}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} \tag{7}$$

car l'élément infinitésimal de longueur en coordonnées sphériques s'écrit $\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\sin\theta\,d\phi\,\overrightarrow{u_\phi}$ et donc $\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{dl} = dr$

Finalement :

$$\int_A^B \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_A^B \tag{8}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) \tag{9}$$

On peut donc écrire que le potentiel en un point M est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r_M} + cste \tag{10}$$

où la constante est choisie en fonction de l'origine des potentiels : si on considère que le potentiel est nul à l'infini, la constante est nulle.

4.2 Généralisation aux distributions de charges classiques

A partir de l'expression précédente (équation 10), on peut donner les expressions des potentiels électriques créés en M par d'autres distributions classiques :

– Pour une distribution de N charges ponctuelles placées en P_i :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$$

– Pour une distribution linéique de charges : $V(M) = \int_{P\in L} \dfrac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 PM}$

– Pour une distribution surfacique de charges : $V(M) = \iint_{P\in S} \dfrac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM}$

– Pour une distribution volumique de charges : $V(M) = \iiint_{P\in V} \dfrac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM}$

Remarques
– on a noté ici le volume élémentaire $d\tau$ pour éviter de le confondre avec le potentiel élémentaire dV.
– Ces expressions ne sont a priori valables que dans le cas de distribution finie, le potentiel étant pris nul à l'infini

4.3 Définition et continuité du potentiel électrique

Comme nous l'avons dit pour le champ électrostatique, les intégrales écrites pour définir le potentiel impliquent certaines contraintes en terme de définition et de continuité du potentiel. Sans détailler cela, il ne faut pas l'oublier.

5 Le champ électrostatique est un champ de gradient

5.1 Définition mathématique

Un champ de vecteurs X est appelé champ de gradient quand il existe une fonction f telle qu'en tout point, X est le gradient de f. On dit encore que X dérive du potentiel f.

5.2 Cas du champ électrostatique

Le champ électrostatique est un champ de gradient :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, V} \tag{11}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{grad}\, V = \overrightarrow{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

Ainsi :

– On dit que le champ $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel V.
– Le signe - est arbitraire (ce choix se justifiera quand nous aborderons l'énergie), il signifie $\overrightarrow{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants (voir propriété 2 des surfaces équipotentielles et sa démonstration).

Remarque

L'équation 11 et l'équation 3 peuvent être toutes les deux utilisées pour définir le potentiel électrique.

6 Surfaces équipotentielles

6.1 Définition

Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points où la valeur du potentiel électrique est la même. Deux surfaces équipotentielles, définies par $V(M) = V_0$ et $V(M) = V_0'$, ne peuvent donc pas se rencontrer. Grâce à celles-ci, on visualise encore mieux (en plus des lignes de champ) les propriétés électriques d'un système de charges.

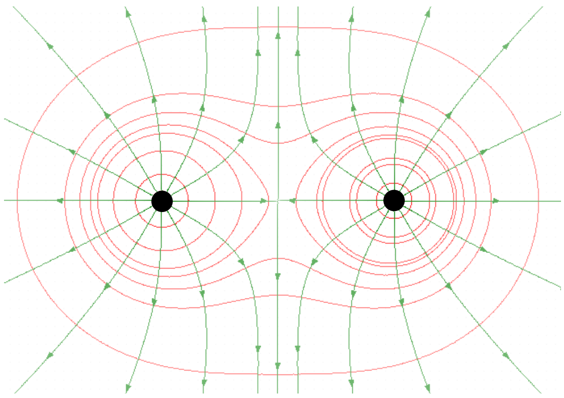

FIGURE 2 – Exemple de tracé de surfaces équipotentielles (en rouge) pour deux charges positives

6.2 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

6.2.1 Propriétés

1. Les surfaces équipotentielles sont en tous points orthogonales aux lignes de champ.

2. Le long d'une ligne de champ, le champ $\overrightarrow{E}$ est dirigé suivant les potentiels décroissants.

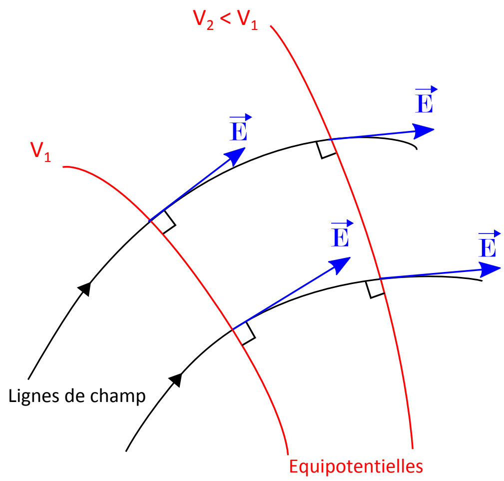

FIGURE 3 – Lignes de champ et surfaces équipotentielles

6.2.2 Démonstrations

1. Soit $\overrightarrow{dl}$ un déplacement élémentaire le long d'une surface équipotentielle. En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z} \tag{12}$$

D'autre part, on sait que $\overrightarrow{E}$ est un champ de gradient :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x}\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y}\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right) \tag{13}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}dx\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial y}dy\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV \tag{14}$$

Or par définition, sur une équipotentielle le potentiel est constant : $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = 0$ CQFD

2. Si on considère à présent un déplacement $\overrightarrow{dl}$ le long d'une ligne de champ et que l'on se déplace dans le sens du champ de A à B, on a :

$$\int_A^B \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = V(A) - V(B) > 0 \quad \text{donc } V(A) > V(B) \quad \text{CQFD} \tag{15}$$

7 Énergie potentielle électrostatique

Utilisons la relation entre le travail et l'énergie que nous connaissons bien en mécanique. On se place dans le cas d'une charge électrique ponctuelle qui se déplace dans un champ extérieur (créé par d'autres charges qui ne nous intéressent pas).

7.1 Travail de la force électrique de Coulomb

Reprenons la première figure de ce chapitre mais ici, nous considérons qu'il s'agit d'une charge q qui effectue une déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ de A vers B.
Sur la taille de ce déplacement, on peut considérer le champ $\overrightarrow{E}$ uniforme.
Écrivons le travail élémentaire de la force de Coulomb subit par cette charge :

$$dW_{AB} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{16}$$

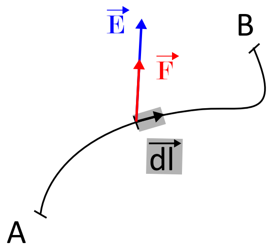

FIGURE 4 – Déplacement élémentaire d'une charge et travail

Or, nous avons vu dans l'équation 14 : $\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -dV$ donc :

$$dW_{AB} = -qdV \tag{17}$$

En intégrant entre A et B pour calculer le travail sur tout le déplacement AB :

$$W_{AB} = \int_A^B -qdV = -q\int_A^B dV = q(V(A) - V(B)) = E_{PA} - E_{PB} \tag{18}$$

Ainsi, le travail de la force de Coulomb **ne dépend pas du chemin suivi**, **la force de Coulomb est conservative**.
Cette force **dérive d'une énergie potentielle** :

$$\boxed{Ep(M) = qV(M) + cste} \tag{19}$$

$\begin{cases} E_P(M) : \text{Energie potentielle exprimée en Joule(J).} \\ q : \text{Charge électrique exprimée en Coulomb (C).} \\ V : \text{Potentiel électrique exprimée en Volt (V).} \\ cste : \text{Constante exprimée en Joule, fixée} \\ \text{par définition de l'origine des énergies potentielles.} \end{cases}$

On retrouve la façon dont on a définit l'énergie potentielle en mécanique.
D'autre part, le potentiel électrique étant défini à une constante près, l'énergie potentielle ne peut qu'être définie de la même manière.

7.2 D'autres méthodes pour retrouver cette énergie

- Sans parler de travail, on a vu dans l'équation 1 :

$$\int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V(A) - V(B)$$

  d'où

$$\int_A^B q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = qV(A) - qV(B) = E_{PA} - E_{PB} \tag{20}$$

  et on retrouve notre énergie.

- On a également vu dnas l'équation 11 :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

donc

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, qV = -\overrightarrow{grad}\, E_P \quad (21)$$

La force de Coulomb dérive bien d'une énergie potentielle comme le champ électrique dérive d'un potentiel.

7.3 Énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles

7.3.1 Définition

L'énergie potentielle d'interaction est l'énergie qu'il faut fournir à un système de deux charges ponctuelles situées initialement à l'infini pour les rapprocher à une distance r_{12} l'une de l'autre.

7.3.2 Énergie potentielle de chaque charge

Soient les charges q_1 et q_2 placées en deux points M_1 et M_2 distants de r_{12}. La charge q_1 est soumise au champ $\overrightarrow{E_2}$ créé par q_2.
Elle possède donc une énergie potentielle électrostatique $E_{P1} = q_1 V_2$ (V_2 car elle subit le champ $\overrightarrow{E_2}$). Ainsi :

$$E_{P1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + cste \quad (22)$$

Et avec le même raisonnement pour la charge q_2 :

$$E_{P2} = E_{P1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + cste \quad (23)$$

Remarque : On peut annuler les constantes ici en supposant que si les charges sont infiniment éloignées l'une de l'autre, elles n'ont aucune influence l'une sur l'autre et elles ne possèdent pas d'énergie potentielle.

7.3.3 Travail et énergie potentielle d'interaction

Pour rapprocher les deux charges depuis l'infini, il faut qu'un opérateur effectue le travail nécessaire à ce rapprochement. L'énergie potentielle d'interaction est égale au travail de cet opérateur.
Pour atteindre le but recherché, celui-ci peut simplement rapprocher une des charges depuis l'infini vers l'autre qui serait fixe à un certain endroit.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la charge que l'opérateur déplace :

$$\Delta E_C = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}}) \quad (24)$$

Or la charge n'est pas en mouvement ni dans sa position de départ, ni dans sa position d'arrivée :

$$0 = W_{opérateur} + W_{force\,de\,coulomb} \quad \text{donc} \quad W_{opérateur} = -W_{force\,de\,coulomb} \quad (25)$$

Le travail de la force de Coulomb a été calculé dans l'équation 18 :

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = qV(A) - qV(B) \quad (26)$$

Sachant que le point A est l'infini, $V(A) = E_{PA} = 0$, on obtient :

$$W_{opérateur} = -W_{force\,de\,coulomb} = E_{PB} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (27)$$

L'énergie potentielle d'interaction entre deux charges a pour expression :

$$\boxed{E_P = E_{P1} = E_{P2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}} \tag{28}$$

8 Références

– "Electromagnétisme PCSI" - P.Krempf - Editions Bréal 2003 ;
– "Physique Cours compagnon PCSI" - T.Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009 ;
– "Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI" - JM.Brébec - Editions Hachette ;
– "Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique" - D.Cordier - Editions Dunod ;
– http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.roussel/index.php?page=accueil_apprendre

EM12 : potentiel et énergie
L'essentiel

Relation entre la circulation du champ électrostatique et le potentiel électrostatique

$$\boxed{C_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B -dV = V(A) - V(B)} \tag{29}$$

Relation entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V} \tag{30}$$

avec $\overrightarrow{grad}\,V = \overrightarrow{\nabla} V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cartésiennes.

Expression du potentiel électrostatique dans quelques cas

Cas d'une charge ponctuelle

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r_M} + cste} \tag{31}$$

Le potentiel électrostatique est défini à une constant près (car la définition du potentiel fait intervenir une intégrale). Si on choisit la référence des potentiels à l'infini ($V = 0$ si $r \to \infty$) alors la constante est nulle.

Cas d'un ensemble de charges ponctuelles

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}}$$

Cas d'une distribution linéique de charges

$$\boxed{V(M) = \int_{P\in L} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 PM}} \tag{32}$$

Cas d'une distribution surfacique de charges

$$\boxed{V(M) = \iint_{P\in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM}} \tag{33}$$

Cas d'une distribution volumique de charges

$$\boxed{V(M) = \iiint_{P\in V} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM}} \tag{34}$$

Surfaces équipotentielles Comme leur nom l'indique ce sont les surfaces sur lesquelles le potentiel électrostatique est une constante.

Les surfaces équipotentielles sont en tout point perpendiculaires aux lignes de champ.

Énergie potentielle électrostatique

$$\boxed{Ep(M) = qV(M) + cste} \qquad \boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P} \tag{35}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la force électrique de Coulomb.