Cours d'électromagnétisme
EM13-Dipôle électrostatique

Table des matières

1 Introduction

La notion de dipôle a une importance particulière en chimie, car dans les molécules, les liaisons entre deux atomes d'électronégativité différente peuvent être assimilées à des dipôles. Le comportement d'un dipôle électrique plongé dans un champ permet d'expliquer pourquoi le champ électrique créé en solution par un ion permet de polariser les molécules du solvant afin qu'elles s'orientent convenablement autour de l'ion en question.

L'énergie d'interaction dipôle-dipôle permettra d'éclaircir la notion de forces de Van der Waals. Ces forces se déclinent en 4 forces :
- forces répulsives (lorsque la distance entre les molécules est faible) ;
- forces attractives entre molécules polaires (Keesom) ;
- forces attractives entre une molécule polaire et une molécule polarisable (Debye) ;
- forces moyennes attractives entre dipôles induits (même lorsque les molécules ne sont pas polaires (London).

2 Définition

2.1 Le dipôle est un doublet

Un dipôle électrostatique est un doublet composé de deux points portant des charges opposées : le point P qui porte la charge +q et le point N qui porte la charge -q. La distance NP est considérée petite et constante.

2.2 Moment dipolaire

On associe une grandeur à ce dipôle, appelée moment dipolaire est définie par :

$$\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{NP} \tag{1}$$

La charge q s'exprime en Coulomb (C), la distance NP en mètre (m) donc le moment dipolaire s'exprime en Coulomb mètre (C×m).
Néanmoins, on lui préfère généralement une autre unité, plus appropriée (ordre de grandeur), le Debye (D) : $1D = \frac{1}{3} \times 10^{-29}\,C \times m$.

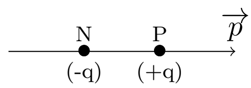

FIGURE 1 – Dipôle électrostatique
et moment dipolaire

2.3 Distribution de charges et dipôle

La notion de moment dipolaire est importante car généralement, on peut assimiler une distribution quelconque électriquement neutre de charges électriques en l'association d'un barycentre des charges positives et d'un barycentre des charges négatives distants de NP et constituant un dipôle électrique.

En chimie par exemple, bien qu'elles soient neutres, certaines molécules possèdent un moment dipolaire. C'est le cas de la molécule d'eau, dont le moment dipolaire vaut 1.85 D.

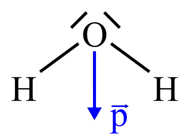

FIGURE 2 – Molécule d'eau
et moment dipolaire

3 Champ et potentiel créé par le dipôle électrostatique actif

3.1 Approximation dipolaire

Le dipôle électrostatique est actif lorsque l'on se place suffisamment loin du dipôle, le point M où l'on observe le champ créé par le dipôle vérifie $r = OM >> NP$.
Cette relation définit l'approximation dipolaire : grâce à elle, on aura la possibilité de négliger certains termes dans l'expression du champ et du potentiel.

3.2 Calcul du potentiel créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

On étudie le potentiel créé par un dipôle NP de moment dipolaire $\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{NP}$ en un point M repéré en coordonnées sphériques par r, θ et ϕ.

La distance NP sera noté d.

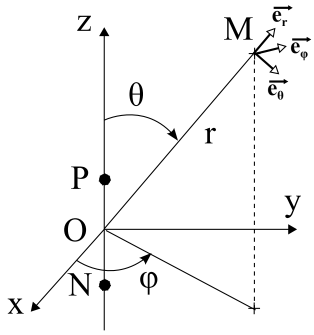

FIGURE 3 – Dipôle électrostatique et coordonnées sphériques

Le potentiel électrostatique créé par ce doublet est égal à la somme des potentiels créés par chacune des charges du doublet :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,PM} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,NM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right) \tag{2}$$

Le potentiel étant pris nul à l'infini, nous ne faisons pas intervenir de constante.

Or on connaît le théorème de Pythagore généralisé qui dit que :

$$PM^2 = PO^2 + OM^2 - 2\,PO\,OM\cos\theta \tag{3}$$

et que :

$$NM^2 = NO^2 + OM^2 - 2\,NO\,OM\cos(\pi - \theta) \tag{4}$$

Or on a OM = r et PO=NO=$\dfrac{d}{2}$, on sait que $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ donc :

$$PM = \left(\frac{d^2}{4} + r^2 - d\,r\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \qquad NM = \left(\frac{d^2}{4} + r^2 + d\,r\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$PM = r\left(\frac{d^2}{4r^2} + 1 - \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \qquad NM = r\left(\frac{d^2}{4r^2} + 1 + \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Finalement :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Connaissant l'approximation dipolaire ($r >> d$), nous pouvons effectuer un développement limité des expressions ci-dessus au premier ordre en $\frac{d}{r}$.

Remarque mathématique
Un développement limité d'une fonction en mathématiques s'effectue en un point : il est une approximation polynomiale de la fonction en ce point.
Par exemple pour le DL que l'on utilisera souvent en physique :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...$$

Ces DL viennent de la formule de Taylor appliqué aux fonctions à approximer :

$$\text{En a,} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

Sachant que $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$, on obtient :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \qquad \frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \tag{8}$$

Le terme en $\frac{d^2}{r^2}$ a disparu puisque l'on se contente du premier ordre.

Revenons maintenant à l'expression de notre potentiel :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right) \tag{9}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \left((1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right) \tag{10}$$

$$\boxed{V(M) = \frac{q\,d\,\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\,r^2} = \frac{p\,\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\,r^2}} \tag{11}$$

Car $p = q\,d$ est la norme du moment dipolaire. On peut donc écrire ce potentiel à l'aide du vecteur moment dipolaire :

$$\boxed{V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\,r^3}} \tag{12}$$

3.3 Champ créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

On utilise la relation qui dit que le champ dérive du potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$. D'où en coordonnées polaires :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial V}{\partial r} = E_r \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = E_\theta \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\,r^3} \\ E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\,r^3} \end{array}\right. \tag{13}$$

3.4 Lignes de champ et équipotentielles associées à un dipôle

Nous avons vu ces allures dans le TD-EM12 :

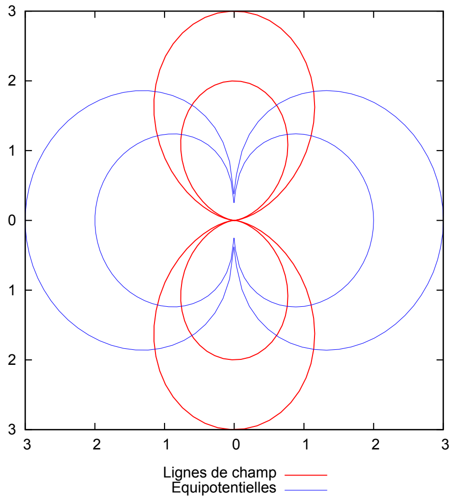

FIGURE 4

4 Cas du dipôle passif

Le dipole est dit passif lorsque l'on étudie l'action d'un champ électrique extérieur sur le dipôle.

4.1 Cas d'un champ extérieur uniforme

Force appliquée

La résultante des forces appliquées sur le moment est la somme de la force de Coulomb qui s'exerce sur P et de la force de coulomb qui s'exerce sur N.

Comme on le voit sur le schéma ci-contre, ces deux forces sont de même valeur mais opposée, **la résultante des forces appliquées sur le dipôle est nulle**.

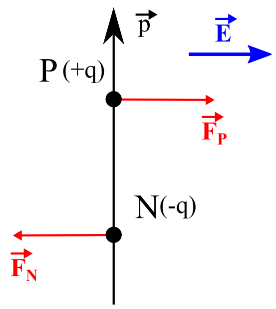

FIGURE 5 – Forces qui s'exercent sur un dipôle baigné dans un champ extérieur

Moment des forces appliquées

Au vu des forces appliquées sur ce dipôle, on s'attend à ce que le moment de ces forces soit non nul. Calculons celui-ci en un point O situé à mi distance de N et de P :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{F_N}) &= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{F_N} && (14)\\
&= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge q\overrightarrow{E} && (15)\\
&= q\overrightarrow{NP} \wedge \overrightarrow{E} && (16)\\
&= \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E} && (17)
\end{aligned}$$

Ce moment est donc non nul et est indépendant du point choisi pour le calculer.

La résultante des forces appliquées au dipôle est nulle mais le moment de celles-ci tend à faire s'orienter spontanément le dipôle dans le sens du champ.

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$$

Énergie potentielle

Cette énergie est toujours égale au travail que l'opérateur effectuerait pour placer le dipôle depuis l'infini à sa position finale.
L'énergie pour la charge située en N s'écrit : $E_P(N) = -q \times V(N)$ où $V(N)$ est le potentiel du champ extérieur au point N.
L'énergie pour la charge située en P s'écrit : $E_P(P) = +q \times V(P)$ où $V(P)$ est le potentiel du champ extérieur au point P.
On a donc :

$$E_P = E_P(N) + E_P(P) = q \times (V(P) - V(N)) \tag{18}$$

Faisons apparaître le moment dipolaire dans cette expression. Pour cela on va écrire la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ entre les points N et P de deux façons :

1. En utilisant le fait que le champ $\overrightarrow{E}$ est uniforme :

$$\int_N^P \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{E} \cdot \int_N^P \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{NP} \tag{19}$$

2. En utilisant la relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$:

$$\int_N^P \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_N^P -\overrightarrow{grad}\, V \cdot \overrightarrow{dl} = V(N) - V(P) \tag{20}$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{NP} = V(N) - V(P) \quad \text{et} \quad E_P = q \times -\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E} \tag{21}$$

L'énergie potentielle électrostatique d'un dipôle plongé dans un champ extérieur est :

$$E_P = q(V(P) - V(N)) = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}$$

Énergie potentielle et position d'équilibre

D'après l'expression ci-dessus, l'énergie potentielle sera extrémale lorsque $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{E}$ seront colinéaires. Ainsi le dipôle admet deux positions d'équilibre : voir figure 6.

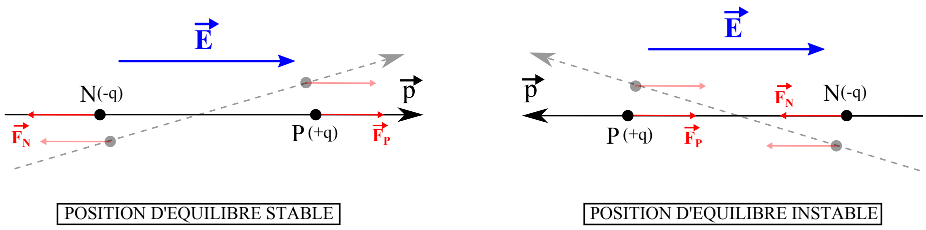

FIGURE 6 – Positions d'équilibre stable et instable du dipôle en présence d'un champ uniforme

4.2 Cas d'un champ extérieur non uniforme

Pour le calcul du moment des forces et de l'énergie potentielle, on use de l'approximation dipolaire dans le cas du dipôle passif en admettant que le champ est uniforme sur la dimension du dipôle (par exemple dans le cas des molécules, la longueur caractéristique de variation de $\overrightarrow{E}$ est toujours très grande devant la taille des molécules). Ainsi, les équations (17) et (21) restent valables :

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E} \quad \text{et} \quad E_P = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}$$

Et le dipôle a tendance à s'aligner dans le sens du champ.

Remarque : Une démonstration de la validité de cette approximation est décrite dans le Hprépa Electromagnétisme 1ère année.

Par contre pour le calcul de la force résultante exercée sur le dipôle, on ne peut pas négliger la variation de $\overrightarrow{E}$: Si le champ n'est pas uniforme, les charges -q et +q sont soumis à des forces différentes et la résultante des forces n'est plus nulle.
Cette résultante étant une force de Coulomb, et la force de Coulomb étant conservative (son travail ne dépend pas du chemin suivi), la résultante des forces dérive de l'énergie potentielle électrostatique du dipôle :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P = -\overrightarrow{grad}(-\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}) = \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}) \tag{22}$$

La force fait donc se diriger le dipôle vers les champs forts.

On peut expliquer aussi cela sur un schéma :

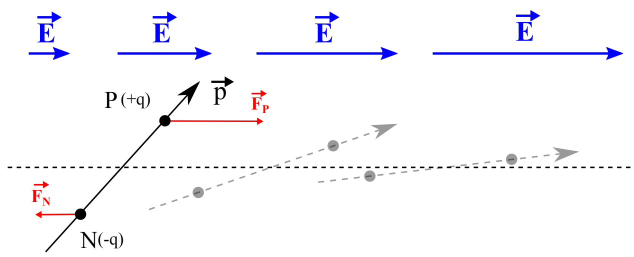

Figure 7 – Déplacement et alignement d'un dipôle dans un champ extérieur non uniforme

Des phénomènes bien connus

La notion de dipôle en déplacement dans un champ non uniforme permet d'expliquer pourquoi un mince filet d'eau peut être dévié en rapprochant une règle préalablement frottée : en effet, les molécules d'eau polaires se comportent comme des dipôles passifs et se déplacent vers les zones de champ fort, c'est à dire à proximité de la règle.
De la même manière, les petits morceaux de papier sont attirés par cette même règle. L'approche d'un champ électrique les polarise (apparition d'un moment dipolaire induit), et les dipôles induits se déplacent vers les zones de champ fort.

Si en un point où existe un dipôle électrostatique passif règne un champ électrique, le dipôle s'aligne toujours sur le champ. On a :

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E} \quad \text{et} \quad E_P = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}$$

Dans le cas où le champ est uniforme, la résultante des forces est nulle, le dipôle ne se déplace pas.
Dans le cas où le champ est non uniforme, la résultante des forces est non nulle et le dipôle se déplace vers les zones de champ fort.

5 Références

- "Electromagnétisme PCSI" - P.Krempf - Editions Bréal 2003 ;
- "Physique Cours compagnon PCSI" - T.Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009 ;
- "Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI" - JM.Brébec - Editions Hachette ;
- "Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique" - D.Cordier - Editions Dunod ;
- http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.roussel/index.php?page=accueil_apprendre
- http://www.sciences.ch/htmlfr/electrodynamique/electrodynchmpelectrique01.php