Cours d'électromagnétisme
EM14-Conducteurs en équilibre électrostatique Condensateurs

Table des matières

1 Introduction

Ce chapitre va être l'occasion de définir la notion de conducteurs à l'équilibre dans le but de parler des condensateurs, composants électriques que nous connaissons bien.

2 Qu'est-ce qu'un conducteur ?

Un conducteur est un corps qui possède des particules chargées pouvant se déplacer librement et ainsi conduire le courant électrique :
- Les métaux sont conducteurs car ils possèdent des électrons libres.
- Les électrolytes sont conducteurs car ils possèdent des ions.

3 Propriétés des conducteurs isolés ou en équilibre électrostatique

3.1 Conducteur isolé

Pris isolément, un métal conducteur est neutre électriquement. Si on se place à une échelle un peu plus grande que celle de l'atome, c'est comme si on ne voyait pas de charges.

Il n'y a pas de charges donc le **champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul** : $\overrightarrow{E}_{\textbf{int}} = \overrightarrow{0}$.

3.2 Conducteur soumis à un champ extérieur : équilibre électrostatique

On soumet à un conducteur un champ électrique extérieur, à l'aide d'un corps chargé par exemple : que se passera t-il à l'intérieur du conducteur ?
Les charges vont se mouvoir dans le conducteur : les charges négatives (électrons libres) sont attirés par le champ tandis que les charges positives (ions positifs) sont repoussées :

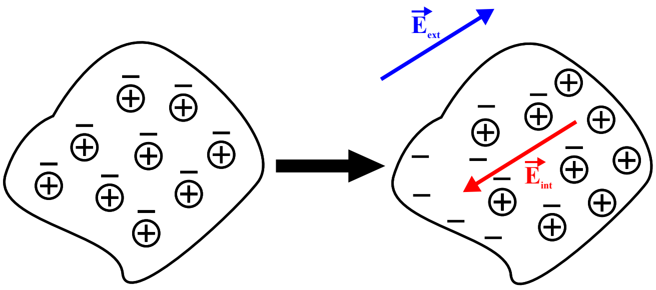

FIGURE 1 – Conducteur soumis à un champ extérieur

Cette nouvelle répartition de charge vient **créé un champ électrique s'opposant au champ électrique extérieur**. Les charges cesseront leur déplacement lorsque le champ intérieur compensera exactement le champ extérieur et finalement : $\overrightarrow{E}_{\textbf{TOTAL}} = \overrightarrow{0}$.

Le conducteur est alors **à l'équilibre électrostatique** : il n'y a **pas de mouvement de charges** (un conducteur isolé est donc aussi à l'équilibre électrostatique).

3.3 Conducteur et potentiel électrostatique

Quand le conducteur est à l'équilibre (plus de mouvement de charges), le champ à l'intérieur de celui-ci est nul.

Et d'après ce que l'on a vu en électrostatique précédemment : $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ donc $V = cste$.

Le potentiel est uniforme au sein du conducteur, on dit aussi que le **conducteur est un volume équipotentiel**.

3.4 Répartition des charges

Si le champ à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est nul, on peut montrer que la densité volumique de charge dans le conducteur est nul : $\rho_{int} = 0$.

Cela signifie que si le conducteur a été préalablement chargé, **les charges n'ont pu se répartir qu'à la surface du conducteur**. On définit donc une densité surfacique de charge σ.

3.5 Champ au voisinage de la surface d'un conducteur

3.5.1 Equipotentielles et lignes de champ

Nous avons vu que le conducteur à l'équilibre était un volume équipotentiel, donc **sa surface est une surface équipotentielle**. On sait depuis le chapitre EM-12 que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

$\boxed{\text{Le champ électrique au voisinage d'un conducteur est orthogonal à sa surface.}}$

3.5.2 Expression du champ au voisinage de la surface

Champ créé par un plan infini Nous avons étudié le champ électrostatique créé par un plan infini chargé en surface (TD-EM11 : Champ obtenu à partir de celui du disque chargée). Les expressions trouvées étaient les suivantes :

$$\overrightarrow{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{2}$$

Pour un axe Oz traversant orthogonalement la surface.

Que se passe t-il très près du conducteur ? Mettons nous à présent très près de la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique : sa surface chargée peut-être considérée comme plane et infinie. Elle porte la charge σ comme nous l'avons vu précédemment.

Soit deux points P et Q proche de cette surface, P étant à l'extérieur du conducteur alors que Q est à l'intérieur. Il y a discontinuité à la traversée de la surface :

$$\overrightarrow{E_P} - \overrightarrow{E_Q} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{3}$$

Or on sait que pour le conducteur, Q étant à l'intérieur de celui-ci, $\overrightarrow{E_Q} = \overrightarrow{0}$. Ainsi :

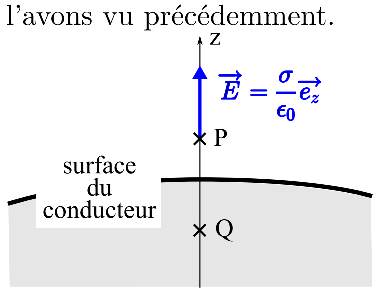

FIGURE 2 – Champ à la surface d'un conducteur

Théorème de Coulomb L'expression du champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur est la suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{ext}}} \tag{4}$$

où $\overrightarrow{n_{ext}}$ est la normale à la surface, dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette relation est nommée **théorème de Coulomb**.

Le point de vue de Feynmann "Pourquoi une couche de charge sur un conducteur ($E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$) produit-elle un champ différent de celui d'une couche de charge seule ($E = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}$) ?
La raison en est évidemment que nous n'avons pas précisé pour le conducteur qu'il n'y avait pas d'autres charges au voisinage. En effet, il doit y en avoir pour que $E = 0$ à l'intérieur du conducteur. Les charges au voisinage immédiat d'un point P de la surface créent en fait un champ $E_{local} = \frac{\sigma_{locale}}{2\,\epsilon_0}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la surface. Mais toutes les autres charges du conducteur conspirent pour produire un champ additionnel au point P égale en intensité au champ E_{local}. Le champ total devient à l'intérieur 0, et le champ à l'extérieur $2E_{local} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$."

Richard Feynman, Electromagnétisme 1, Editions Dunod

- Lorsqu'un conducteur est isolé ou à l'équilibre électrostatique (plus de mouvement de charges), le champ électrique à l'intérieur de celui-ci est nul : $\overrightarrow{E}_{int} = \overrightarrow{0}$.

- Le conducteur est un volume équipotentiel et sa surface une surface équipotentielle.
- La densité volumique de charge à l'intérieur est nulle ($\rho_{int} = 0$). Les charges sont réparties à la surface du conducteur : on définit σ, une densité surfacique de charge.
- Le champ a proximité de la surface du conducteur a pour expression :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{ext}}$$

4 Le pouvoir des pointes

le théorème de Coulomb que l'on vient de voir à une conséquence directe : le terme "pouvoir des pointes" traduit le fait que le champ électrique peut devenir extrêmement important au niveau d'une pointe conductrice.

- Prenons un conducteur sphérique chargé avec la charge Q. On peut facilement montrer (on ramène la sphère à un corps ponctuelle portant la chrage Q, comme on le fait en mécanique où on prend le modèle de répartition sphérique de masse des planètes ...) que celui-ci créera le champ électrostatique :

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r} \tag{5}$$

En un point M distant de r du conducteur.

- Ce champ correspond à un potentiel :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

Si on choisit la référence des potentiels à l'infini.

– Le potentiel étant continu partout, sur la sphère conductrice, on a :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{7}$$

– On envisage maintenant la mise en contact d'une sphère conductrice de rayon R_1 avec une sphère conductrice de rayon R_2 ($R_2 < R_1$). Elle porte chacune la charge Q_1 et Q_2, et la densité surfacique de charge σ_1 et σ_2. Comme nous mettons les sphères en contact, elles sont au même potentiel :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{8}$$

$$\frac{\sigma_1 \times S_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_2 \times S_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{9}$$

$$\frac{\sigma_1 \times 4\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_2 \times 4\pi R_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{10}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_1}{R_2}\sigma_1 \tag{11}$$

Comme $R_2 < R_1$, on a $\sigma_2 > \sigma_1$. D'après le théorème de coulomb, le champ électrostatique est plus important au voisinage d'un conducteur de rayon de courbure important (petite sphère).

Et voici comment on pourrait modéliser une pointe conique :

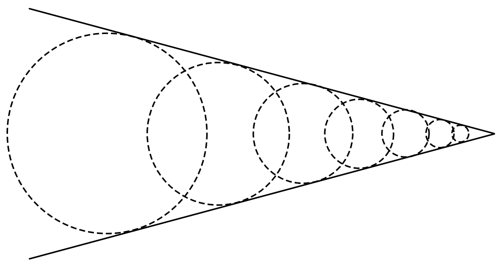

Figure 3 – Modélisation d'une pointe

Comme les sphères modélisant la pointe sont au même potentiel et ont un rayon de plus en plus petit à mesure que l'on se dirige vers le bout de celle-ci, le champ électrostatique créé devient plus fort.
Cette propriété est mise en jeu dans les paratonnerres : le champ à leur extrémité est si fort qu'il peut ioniser l'air est créé un canal conducteur ascendant qui vient rencontrer le canal conducteur descendant créé par l'orage ...

Le champ électrique créé au voisinage d'un conducteur est d'autant plus important que le rayon de courbure de celui-ci est petit : ceci donne naissance au "pouvoir des pointes", le champ électrique est très important au niveau de pointes conductrices.

5 Capacité d'un conducteur

Nous allons définir ici la capacité d'un conducteur : comme son nom l'indique, c'est la capacité qu'a le conducteur à accumuler des charges électriques sous un potentiel donné.

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique. Il est chargé d'un densité surfacique de charge σ. Si celui-ci est porté à un potentiel V, on peut écrire en tout point M du conducteur :

$$V(M) = \iint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM} \tag{12}$$

Si P est un point de la surface du conducteur.

On peut également écrire l'expression de la charge totale du conducteur :

$$Q = \iint_S \sigma dS \tag{13}$$

Si on multiplie la densité surfacique de charge par un coefficient α, le conducteur retrouve un état d'équilibre électrostatique où il est porté à un potentiel $V' = \alpha V$ et où sa charge est une nouvelle charge $Q' = \alpha Q$.

Ainsi à l'équilibre, la quantité Q/V est constante :
Cette constante positive est appelée capacité du conducteur exprimée en Farad (F), elle ne dépend que de la géométrie de celui-ci.

Exemple

On a vu précédemment ((7)) que le potentiel créé par une sphère avait pour expression :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

On peut alors obtenir la capacité de ce conducteur sphérique :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \simeq \times 10^{-11} R \tag{14}$$

Les capacités des conducteurs sont faibles, on utilise donc souvent des sous-multiples du Farad pour donner leur valeur.

> La capacité d'un conducteur à accumuler des charges électriques lorsqu'il est porté à un potentiel V se mesure en Farad, elle ne dépend que de la géométrie du conducteur et de sa nature.

6 Énergie potentielle électrostatique d'un conducteur

Soit un conducteur en équilibre électrostatique portant la charge Q, soit V son potentiel et C sa capacité, on montre que :

$$E_P = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{15}$$

7 Condensateurs

7.1 Généralité

Lorsque l'on approche un conducteur chargé (positivement par exemple) d'un conducteur neutre, les charges positives du conducteur neutres sont repoussées alors que ses charges négatives sont attirées. La répartition des charges dans le conducteur neutre a été modifiée par influence (partielle).

L'influence est totale lorsqu'un des conducteurs entoure l'autre. On montre alors que les surfaces qui se font face portent des charges opposées.

Définition

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs à l'équilibre sous influence totale : on les appelle armatures du condensateur, elles portent les charges -Q et +Q.

7.2 Condensateur plan

Le condensateur est plan lorsque les armatures sont des conducteurs plans suffisamment rapprochés pour les considérer sous influence totale.
Les deux plans portent donc des densités de charges opposées σ et $-\sigma$.

7.2.1 Champ électrostatique créé

Reprenons les expressions déjà utilisées, concernant le champ créé par un plan infini chargé :

$$\overrightarrow{E}(\sigma+) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{16}$$

$$\overrightarrow{E}(\sigma-) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{17}$$

$$\overrightarrow{E}(-\sigma+) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{18}$$

$$\overrightarrow{E}(-\sigma-) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} \tag{19}$$

On considère le champ uniforme au voisinage du condensateur.

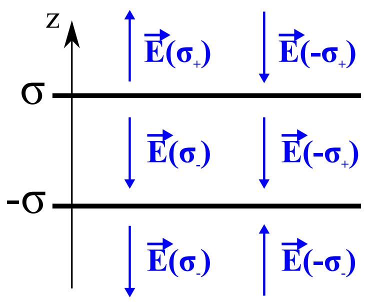

FIGURE 4 – Champ électrostatique créé par un condensateur plan

On alors un champ nul en dehors des armatures et un champ uniforme entre les armatures égal à :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{20}$$

et dirigé de l'armature positive vers l'armature négative (ici suivant $-\overrightarrow{e_z}$).

7.2.2 Tension et capacité

Appelons A l'armature positive et B l'armature négative du condensateur et utilisons une relation liant le champ électrostatique à la différence de potentiel :

$$\int_A^B \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = V(A) - V(B) = U_{AB} \tag{21}$$

Le champ électrostatique entre les armatures étant uniforme cette relation devient :

$$\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{AB} = V(A) - V(B) = U_{AB} \tag{22}$$

Si e est l'épaisseur du condensateur, c'est à dire la distance entre les armatures, alors :

$$U_{AB} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \tag{23}$$

On peut aussi écrire que $Q = \sigma S$ avec S la surface des armatures, ainsi :

$$U_{AB} = \frac{Qe}{S\epsilon_0} \tag{24}$$

Enfin on sait que $Q = CU_{AB}$, alors pour le condensateur plan :

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}} \tag{25}$$

Cette expression est celle de la capacité du condensateur plan.

7.2.3 Choix du matériau séparant les armatures

Les équations que nous venons de voir sont valables dans le cas où le vide sépare les deux armatures. Mais généralement, les armatures d'un condensateur sont séparées par un matériau isolant dit diélectrique. Celui-ci a la propriété de se polariser sous l'action d'un champ électrique.
Il créé alors un champ opposé au champ créé au sein du condensateur.

Si le champ électrique global diminue entre les armatures, alors la tension entre celles-ci diminue ce qui a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur, pour une charge électrique d'armature donnée.

7.2.4 Énergie potentielle électrostatique d'un condensateur

Soit un condensateur dont la charge de l'armature positive A est Q, qui est à un potentiel V_A (l'armature B porte la charge $-Q$ et est à un potentiel V_B), on montre que :

$$E_P = \frac{1}{2}Q(V_A - V_B) = \frac{1}{2}C(V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{26}$$

- Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs à l'équilibre, proches, portant une charge opposée et séparés par du vide ou un matériau diélectrique.
- Entre les armatures d'un condensateur plan, le champ est uniforme et a pour expression :

  $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{pn}} \tag{27}$$

  Où $\overrightarrow{n_{pn}}$ est un vecteur unitaire dirigé de l'armature positive à l'armature négative.
  En dehors de l'entre-armature, le champ est nul.
- La capacité d'un condensateur plan a pour expression :

  $$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \tag{28}$$

  avec Q la charge de l'armature positive (C), U_{AB} la tension entre les armatures (V), S la surface des armatures (m^2) et e la distance entre celles-ci (m).
- Le choix d'un matériau diélectrique séparant les armatures permet d'augmenter la capacité du condensateur.
- L'énergie électrostatique stocké dans un condensateur a pour expression :

  $$E_P = \frac{1}{2}C(V_A - V_B)^2 \tag{29}$$

8 Références

- "Electromagnétisme PCSI" - P.Krempf - Editions Bréal 2003 ;
- "Physique Cours compagnon PCSI" - T.Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009 ;
- "Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI" - JM.Brébec - Editions Hachette ;
- "Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique" - D.Cordier - Editions Dunod ;
- "Richard Feynman, Electromagnétisme 1" - Editions Dunod ;
- http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.roussel/index.php?page=accueil_apprendre