Chute verticale d'un objet

Bilan des forces :

- le poids
- la force de frottement fluide (laminaire en v pour des objets petits avec une vitesse faible, turbulente en v² pour des objets gros avec une vitesse fluide)
- la poussée d'Archimède

Equation du mouvement

Expression des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$ $\qquad \vec{f} = -h\vec{v}$ $\qquad \vec{\Pi} = -\rho \mathrm{V}\vec{g} = -m'\vec{g}$

On applique la 2ème de loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} - h\vec{v} - m'\vec{g} = m\vec{a}$$

$$(m - m')\vec{g} - h\vec{v} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{m - m'}{m}\vec{g} - \frac{h}{m}\vec{v}$$

Notons $\alpha = \dfrac{m - m'}{m}$

$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\vec{g} - \dfrac{h}{m}\vec{v}$: Équation différentielle du mouvement

On projette sur un axe vertical (Oz) :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \alpha g - \frac{h}{m}v}$$

Soit $\overrightarrow{OG}$ vecteur position : $\overrightarrow{OG} = z\,\vec{k}$, $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \dot{z}\vec{k}$ et $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{z}\vec{k}$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = \alpha g$$

$$\dot{z} + \frac{h}{m}\ddot{z} = \alpha g$$

Vitesse limite :

$$v_{\lim} = cte \iff \frac{dv}{dt} = 0$$

Par suite, $\alpha g - \dfrac{h}{m}v_{\lim} = 0 \iff \boxed{v_{\lim} = \dfrac{\alpha g m}{h}}$

Vitesse initiale à $t = 0s$, $v(0) = 0$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha g$$

On obtient donc : $\boxed{v(t) = \alpha g t}$

Chute libre d'un objet

Un objet est en mouvement de chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à l'action de son poids.

$\vec{P} = m\vec{a}$ (2ème loi de Newton), et $\vec{P} = m\vec{g}$

D'où $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

L'accélération est donc une constante vectorielle sous réserve que la chute se fasse dans un champ de pesanteur uniforme.

Résolution de l'équation différentielle :

$$a = g \qquad \frac{dv}{dt} = g \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = g \qquad \ddot{z} = g$$

On intègre :

$v(t) = gt + C_1$ or à $t = 0$, $v(0) = 0$ d'où $v(t) = gt$ et $\dot{z} = gt$

On intègre de nouveau :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_2 \quad \text{or à } t = 0,\ z(0) = 0$$

D'où $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}gt^2}$