Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Pour un objet dense, profilé, en chute sur quelques mètres, on peut supposer en première approximation que seul le poids s'applique à l'objet : on parlera alors de **chute libre**.

Equation différentielle du mouvement :

Référentiel galiléen. $\overrightarrow{OG}$: vecteur position associé au centre d'inertie du système.

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{d\,\overrightarrow{OG}}{d\,t} = \dot{x}\vec{i} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OG}}{d\,t^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{z}\vec{k}$$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v_G}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$ de plus, on a : $\vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

Or $\vec{a} = \vec{g}$, donc on obtient le système d'équation suivant :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}}$$

Résolution de l'équation :

Détermination du vecteur vitesse :

Conditions initiales : A $t = 0$, $x_0 = z_0 = 0$

A $t = 0$, *on considère* : $\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha = (\vec{i}\,;\vec{v}_0)$

Pour obtenir les coordonnées du vecteur vitesse, on cherche une primitive pour chacune des composantes du système écrit ci-dessus :

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{z} = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = C_1 \\ \dot{z}(0) = v_{0z} = v_0 \sin\alpha = C_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_t}\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}}$$

Equation horaire du mouvement :

Pour obtenir les équations horaires du mouvement, il faut calculer une primitive de chacune des composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t + C_3 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_4 \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions initiales :

A $t = 0$, $x(0) = z(0) = C_3 = C_4$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}}$$

Equation cartésienne de la trajectoire :

On a alors $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

On introduit cette expression dans z(t) :

$$\boxed{z(t) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)\, x}$$

Cette équation est l'équation d'une parabole.

La trajectoire entre le point de départ et la cible est caractérisé par deux grandeurs : la flèche H et la portée D :

La flèche est l'altitude de H la plus élevée atteinte par le projectile. On observe en ce point que la vitesse n'a qu'une composante horizontale donc $v_z(t_A) = 0$

d'où $-g\, t_A + v_0 \sin\alpha = 0$ et $t_A = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (abscisse de A)

On recherche maintenant l'ordonnée de A :

On alors : $H = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + v_0 \sin\alpha \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

La portée est la distance maximale parcourue par le projectile et est caractérisée par le point d'impact B où $z_B = 0$

$$z_B = 0 \Leftrightarrow -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x_B^2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x_B = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_B}{\cos\alpha}\left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos\alpha} + \sin\alpha\right) = 0$$

Cette équation admet 2 solutions $x_B = 0$ ou $x_B = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \, \sin\alpha}{g}$

Or $2\sin\alpha \, \cos\alpha = \sin(2\alpha)$

$$\boxed{x_B = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$