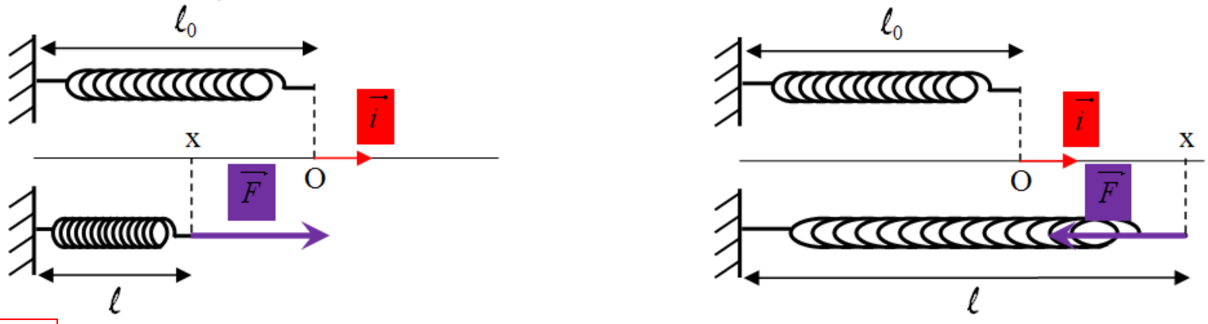
LE SYSTEME MASSE RESSORT

La force F exercée par le ressort sur le solide accroché au bout du ressort est appelée **force de rappel**. Elle est proportionnelle à l'allongement x du ressort :



$\boxed{\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}}$ avec k la **constante de raideur** du ressort et s'exprime $N.m^{-1}$

Détermination de k :

On suspend le ressort verticalement.

A l'équilibre, d'après le principe d'inertie : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, et on projette sur l'axe (Oz) : $P - F = 0$ d'où $P = F$

Ainsi, $m\,g = k\,z$ d'où $\boxed{k = \dfrac{m\,g}{z}}$

Equation différentielle du mouvement :

La 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton permet d'écrire : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_G$ avec $\vec{R}$ la force de réaction du sol sur le solide accroché au bout du ressort.

Or $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ (dans la position d'équilibre du ressort) donc $\vec{F} = m\vec{a}_G$

Projetons cette accélération sur l'axe Ox : $-k\,x = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$

On obtient alors l'équation caractéristique d'un oscillateur non amorti : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0}$

Solution de la forme : $\boxed{x(t) = x_m \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)}$

Dérivons deux fois $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} \times x_m \times \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right) \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \times x_m \times \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right)$$

On réinjecte dans l'équation différentielle : $-\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 \times x_m \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right) + \dfrac{k}{m}x_m \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right) = 0$

On factorise : $x_m \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right) \times \left(-\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \dfrac{k}{m}\right) = 0$

Ceci doit être vrai pour tout *t*, donc $-\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \dfrac{k}{m} = 0$ d'où $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

On détermine ensuite ϕ_0 et x_m avec les conditions initiales : A $t = 0$, $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$ …