Cours de mécanique
M12-Chute libre avec frottements

1 Introduction

Nous avons modélisé au chapitre précédent le corps qui chute dans le champ de pesanteur en considérant que les frottements de l'air étaient négligeables. Cette supposition n'ayant qu'une utilité théorique, nous complexifions ici notre modèle en tenant compte de ces frottements : comment ceux-ci vont modifier la trajectoire du corps qui chute ?
Ce sera l'occasion de voir que ces frottements peuvent être de deux types, linéaires ou quadratiques, nous avons alors rencontré deux types d'équations différentielles : la résolution de la première ne nous posera pas de problème ; mais la résolution de la seconde est moins aisée : nous en profiterons pour voir une méthode numérique itérative permettant d'approcher la forme de la solution : la méthode d'Euler.
Enfin parmi les deux modèles de forces de frottement, lequel se révèle le plus juste pour étudier le parachutisme ? Nous tenterons une réponse à l'aide de la mécanique des fluides.

2 Problème 3

Un parachutiste de masse 80 kg réalise un saut depuis un hélicoptère. La première partie du saut, celle qui nous intéresse ici, est réalisée sans parachute. Quelles sont les caractéristiques de celle-ci sachant que les frottements de l'air ne sont pas négligeables ?

3 Système

Le système étudié est le sauteur considéré ponctuel.

4 Référentiel et base

On étudie son mouvement dans un référentiel terrestre lié au sol (à son point de chute), ce référentiel est considéré galiléen pendant la durée de la chute. On utilisera une base cartésienne à une dimension pour suivre l'évolution du sauteur : un axe Oz vertical ascendant avec origine au point de chute constituera le repère d'étude.
On considère en effet que le mouvement du parachutiste est strictement vertical.

5 Forces

5.1 Bilan des forces

- Le sauteur est soumis à son poids noté $\overrightarrow{P}$, force à distance exercée par la Terre sur lui.
- Il est soumis aux forces de frottements de l'air, modélisées par une force de contact notée $\overrightarrow{f}$. Cette force peut aussi être nommée résistance de l'air.

5.2 Deux types de forces de frottements

La force de frottements de l'air peut prendre deux formes :

Frottements linéaires

Dans le cas d'une vitesse faible, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse :

$$\overrightarrow{f} = -k\,\overrightarrow{v} \tag{1}$$

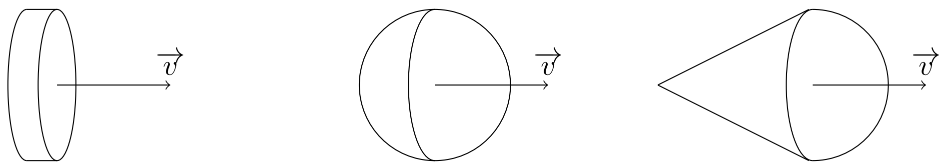
On parle de **frottements linéaires**. k est une constante qui dépend de la nature du fluide et des caractéristiques de l'objet.
Par exemple pour une sphère de rayon r, on a $k = 6\,\pi\,\eta\,r$ où η est la viscosité du fluide.

Frottements quadratiques

Dans le cas d'une vitesse importante, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :

$$\overrightarrow{f} = -k'\,v\,\overrightarrow{v} \tag{2}$$

On parle de **frottements quadratiques**. k' est aussi une constante qui dépend du fluide et des caractéristiques de l'objet mais elle prend une autre forme que k :
Son expression est du type $k' = \frac{1}{2}\,\eta\,C_x\,S$ avec η la viscosité du fluide, S la surface frontale de l'objet et C_x le coefficient de trainée (appelé dans le langage courant coefficient de pénétration dans l'air) qui dépend de la géométrie du corps. Par exemple, voici trois géométries et trois valeurs de C_x :



$C_x = 1.32$ $C_x = 0.45$ $C_x = 0.04$

Ce coefficient de trainée peut se calculer pour une sphère lisse (sans rugosité) dans le cas d'écoulement à faible vitesse (à faible nombre de Reynolds), il dépend alors du nombre de Reynolds.

Pour des écoulements turbulents (à grand nombre de Reynolds $> 10^3$), on mesure le C_{x} en soufflerie. En sachant qu'il est constant pour un corps donné.

6 Utilisation de la 2ème loi de Newton

$$\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} = m\,\overrightarrow{a} \tag{3}$$

7 Résolution du problème dans le cas de frottements linéaires

7.1 Equation différentielle

Le PFD donne : $m\,\overrightarrow{g} - k\,\overrightarrow{v} = m\,\overrightarrow{a}$.

On projette maintenant cette relation sur l'axe Oz vertical ascendant.

$$-m\,g - k\,v_z = m\,a \Longleftrightarrow m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + k\,v_z = -m\,g \tag{4}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,v_z = -g} \tag{5}$$

On obtient donc une équation différentielle en v_z, linéaire du premier ordre à coefficients constants. On sait résoudre cette équation mathématiquement.
Une fois l'expression de la vitesse v_z obtenue, on en déduira la position par intégration.

Une notation particulière

Souvent ce type d'équation sera écrite ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = -g \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{k}$$

La notation τ fait référence à un temps. En effet, la grandeur $\tau = \frac{m}{k}$ est un temps caractéristique de la fonction $v = f(t)$, comme nous allons le voir par la suite.

7.2 Solution de l'équation différentielle

7.2.1 Principe

Une équation différentielle linéaire avec second membre se résout en deux temps :
- on cherche d'abord la solution s_h de l'équation homogène, c'est à dire l'équation sans second membre ;
- on cherche une solution particulière s_p, c'est à dire une solution qui a même forme que le second membre (si le second membre est constant, la solution particulière recherchée sera une constante).

La solution de l'équation différentielle avec second membre est la somme de la solution homogène et de la solution particulière : $s = s_h + s_p$.

Attention, dans la solution de l'équation homogène apparaissent souvent des constantes (une si l'équation est du premier ordre, deux si elle est du deuxième ordre). La détermination de ces constantes à l'aide des conditions initiales doit être menée en tenant compte de la solution particulière.

7.2.2 Pour notre problème

On recherche la solution de l'équation complète (5), qui est une vitesse.

Solution de l'équation homogène

$$\text{Equation homogène : } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Solution : } v_h = A\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec A une constante

On peut vérifier en dérivant une fois v_h que cette solution vérifie l'équation homogène.

Solution particulière

Le second membre étant constant (égal à $-g$), on cherche une solution particulière $v_p = \text{cste}$. Alors $\dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = 0$ et on obtient $v_p = -g\,\tau$.

Solution globale

On a donc :

$$v_z = A\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + -g\,\tau \tag{6}$$

On peut maintenant déterminer A à l'aide des conditions initiales :

$$\text{A } t = 0 \ : v(t=0) = 0 = A - g\,\tau \Longleftrightarrow A = g\,\tau \tag{7}$$

Et finalement :

$$\boxed{v_z = g\,\tau\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right)} \tag{8}$$

Attention, rappelons que cette vitesse est négative puisque le corps qui chute se dirige suivant l'axe Oz descendant.

7.3 Courbe $|v_z| = f(t)$ et caractéristiques

7.3.1 Courbe

On souhaite visualiser la norme de la vitesse en fonction du temps. Son expression est donc :

$$|v_z| = g\,\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \tag{9}$$

Voici la courbe obtenue :

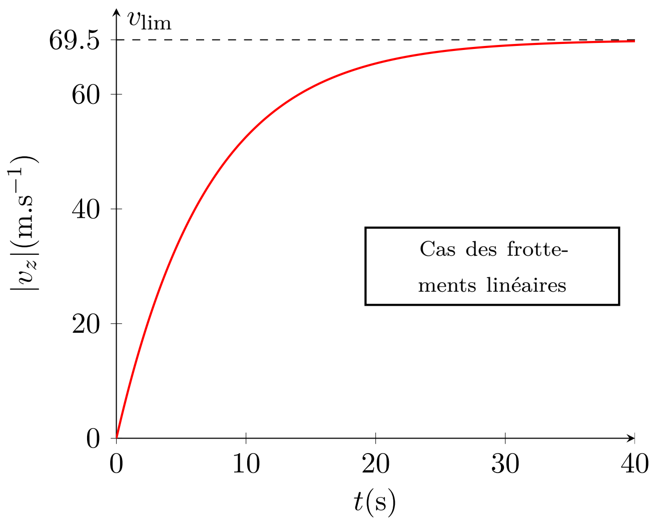


FIGURE 1 – Vitesse du parachutiste dans le cas de frottements linéaires

La vitesse augmente d'abord fortement, puis de plus en plus faiblement pour atteindre une valeur limite.

7.3.2 Vitesse limite

— La valeur de la vitesse limite peut être obtenue en calculant la limite de $|v_z(t)|$ quand le temps tend vers l'infini :

$$\lim_{t\to\infty} |v_z(t)| = \lim_{t\to\infty} g\,\tau \left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) = g\,\tau \tag{10}$$

— On peut également la trouver à partir de l'équation différentielle (5). En effet, la vitesse limite est constante, on a ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}v_{z\,\mathrm{lim}}}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{z\,\mathrm{lim}}}{\tau} = -g \Longleftrightarrow 0 + \frac{v_{z\,\mathrm{lim}}}{\tau} = -g \tag{11}$$

$$\Longleftrightarrow v_{z\,\mathrm{lim}} = -g\,\tau \tag{12}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{|v_{z\,\mathrm{lim}}| = g\,\tau} \tag{13}$$

7.3.3 Temps caractéristique

La grandeur $\tau = \dfrac{m}{k}$ est caractéristique de l'évolution de la vitesse dans le temps. Dans ce type d'évolution, on parle de **régime transitoire** et de **régime permanent** :

— le régime est transitoire tant que la vitesse évolue ;

— le régime est permanent lorsque la vitesse limite est atteinte.

Le temps τ est un bon indicateur pour savoir quand on passe d'un régime à l'autre : **on considère qu'au bout de 5τ, le régime permanent est atteint.**

Détermination de τ

On peut obtenir la valeur de τ graphiquement : on cherche l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe en $t = 0$ et l'asymptote quand $t \to \infty$ de la courbe $|v_z| = f(t)$. On obtient ainsi la limite entre régime transitoire et régime permanent :

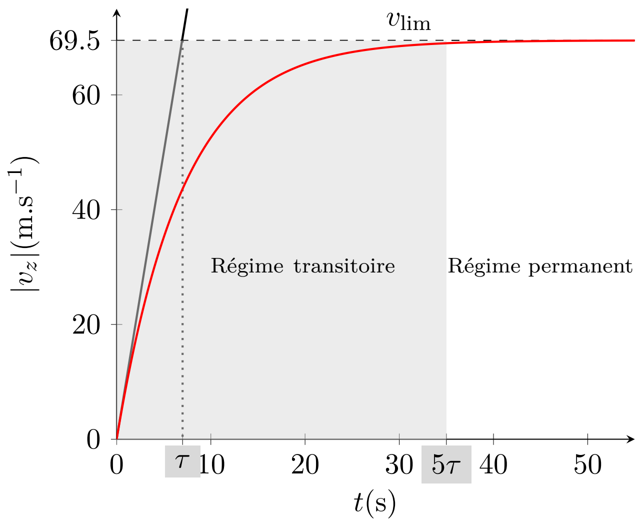


FIGURE 2 – Différents régimes lors de la chute avec frottements

7.4 Obtention de la position

La fonction $z = f(t)$ s'obtient en intégrant la fonction $v_z = f(t)$:

$$v_z = g\,\tau \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right) = g\,\tau\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\,\tau \tag{14}$$

$$\Longrightarrow z(t) = -g\,\tau^2\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\,\tau\,t + \text{cste} \tag{15}$$

La constante est obtenue à l'aide de la condition initiale de position :
A $t = 0$, $z = h$ donc $-g\,\tau^2 + \text{cste} = h \iff \text{cste} = h + g\,\tau^2$

On a finalement :

$$\boxed{z(t) = g\,\tau^2\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - g\,\tau\,t + h} \tag{16}$$

On prend comme altitude de départ $h = 4000\,\text{m}$.

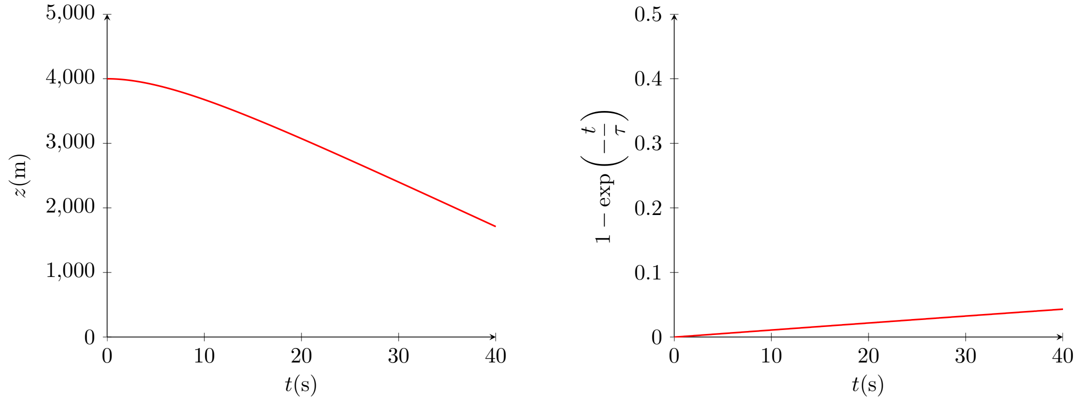


FIGURE 3 – Position du parachutiste dans le cas de frottements linéaires

La forme de la courbe $z = f(t)$ montre que la position varie quasi linéairement par rapport au temps, c'est-à-dire qu'on a pratiquement $z = a\,t + b$ avec a la pente négative.
En effet, nous pouvons voir que l'expression $1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ est très petite et que l'expression de $z(t)$ écrite à l'équation (16) tend vers :

$$z(t) = -g\,\tau\,t + h \tag{17}$$

Il s'agit bien d'une droite de pente $-g\,\tau$ négative.

8 Résolution dans le cas de frottements quadratiques

8.1 Equation différentielle

Le PFD donne : $m\,\overrightarrow{g} - k'\,v\,\overrightarrow{v} = m\,\overrightarrow{a}$.

Dans l'optique d'utiliser la méthode d'Euler, nous allons utiliser un axe Oz vertical **descendant** afin de travailler avec une vitesse positive.

$$m\,g - k\,v_z^2 = m\,a \iff m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + k'\,v_z^2 = m\,g \tag{18}$$

$$\iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{k'}{m}\,v_z^2 = g} \tag{19}$$

On pourra également introduire le temps caractéristique $\tau' = \dfrac{m}{k'}$. Cette équation différentielle n'est pas linéaire, nous ne pouvons pas la résoudre facilement.

8.2 Vitesse limite

Par contre, nous pouvons d'ores et déjà connaître la vitesse limite :

$$\text{Lorsque } \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ alors } v_{z\,\mathrm{lim}} = \sqrt{\frac{g\,m}{k'}} = \sqrt{g\,\tau'}.$$

Cette équation différentielle, complexe à résoudre, va être l'occasion d'utiliser une méthode de résolution numérique itérative : **la méthode d'Euler**.

8.3 Résolution par la méthode d'Euler

8.3.1 Ce qu'est la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique itérative qui permet d'obtenir une solution approchée d'une équation différentielle à partir des conditions initiales.

Rappels mathématiques

— Dérivée = cœfficient directeur de la tangente à la courbe.
— Calcul d'une dérivée en un point aisée :

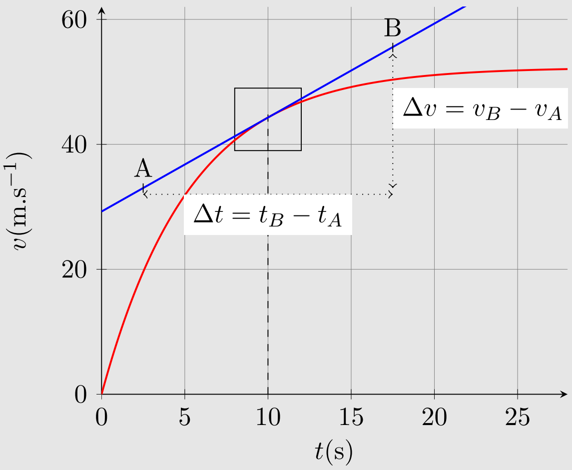


FIGURE 4 – Calcul de la dérivée d'une courbe en un point

D'après la définition mathématique de la dérivée :

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=10\,\mathrm{s}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{20}$$

Si on réalise un zoom sur la courbe :

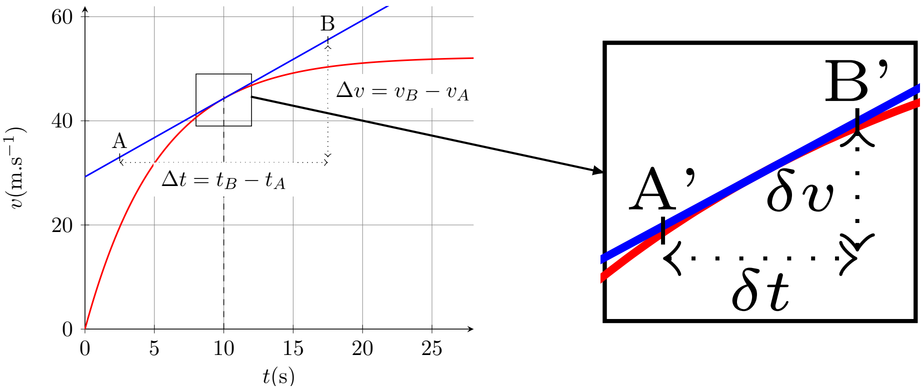


FIGURE 5 – Dérivée et temps infinitésimal

On peut alors écrire, en considérant un intervalle de temps δt suffisamment petit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_t = \frac{\delta v}{\delta t} \tag{21}$$

On peut alors exprimer la petite variation de vitesse δv qui se produit pendant le petit intervalle de temps δt grâce à l'équation différentielle :

$$\text{Si } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A\,v^2 + B \quad \text{alors} \quad \boxed{\delta v = (A\,v^2 + B) \times \delta t} \quad \text{lorsque } \delta t \to 0 \tag{22}$$

Mise en œuvre

- On part de la condition initiale, la valeur de $v(t=0) = v_0$;
- on choisit le pas de calcul, soit la valeur de δt ;
- on calcule :
$$v_1 = v_0 + \delta v = v_0 + (A\,v_0^2 + B) \times \delta t \tag{23}$$
- et ainsi de suite :
$$v_{i+1} = v_i + (A\,v_i^2 + B) \times \delta t \tag{24}$$
- un tableur viendra nous assister dans la répétition des calculs.
- le choix du pas de calcul δt doit être judicieux : il faut prendre un intervalle suffisamment petit pour que l'approximation soit valable, mais pas trop petit afin que les calculs ne soient pas trop longs.

8.3.2 Utilisation de cette méthode dans notre cas

Obtention de la vitesse en fonction du temps

Pour utiliser cette méthode, il nous faut la valeur des cœfficients A et B qui apparaissent dans l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{k'}{m}v_z^2 = g \tag{25}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{k'}{m}v_z^2 + g = A\,v_z^2 + B \qquad \text{avec } A = -\frac{k'}{m} \text{ et } B = g \tag{26}$$

La valeur de B est donc connu, on peut évaluer la valeur de A à partir de la vitesse limite atteinte par un parachutiste. Celle-ci, qui dépend de la position (groupé ou droit comme un i) du sauteur lors de la chute, est de 69,5 m.s^{-1}. Donc :

$$v_{z_{\lim}} = \sqrt{\frac{g\,m}{k'}} = \sqrt{\frac{g}{-A}} \Longrightarrow A = -\frac{g}{|v_{z_{\lim}}|^2} = -\frac{9{,}81}{69{,}5^2} = -2{,}0 \times 10^{-2}\,\text{SI} \tag{27}$$

On connaît également la vitesse initiale : $v_z(t=0)=0$. On peut donc appliquer la méthode en choisissant un pas δt judicieux. On prendra par exemple $\delta t = 0{,}3\,\mathrm{s}$. Alors :

$v_1 = v_0 + (A\,v_0^2 + B) \times \delta t = B\,\delta t = 2{,}94\,\mathrm{m.s^{-1}}$
$v_2 = v_1 + (A\,v_1^2 + B) \times \delta t = 5{,}87\,\mathrm{m.s^{-1}}$

...

A l'aide d'un tableur, on répète les calculs jusqu'au temps voulu. On peut ensuite tracer la courbe $v_z = f(t)$.

Ci-dessous, on a tracé les courbes pour des pas de calculs différents. On remarque qu'il n'y a pas de différences entre nos trois tests.

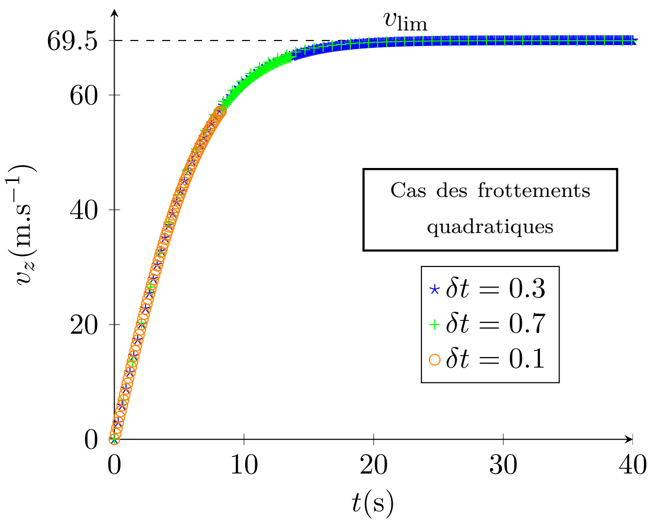


Figure 6 – Méthode d'Euler appliquée aux cas des frottements quadratiques

Qu'en est-il de la position en fonction du temps ?

Pour obtenir la courbe de position en fonction du temps, on part de la donnée de vitesse et on calcule la distance parcourue par la formule classique $v = \frac{d}{t}$. On utilise cette formule pour chaque ligne du tableur dans lequel on a exploité la méthode d'Euler.

On a ensuite changé l'origine pour prendre le point de départ du parachutiste à 4000 m.

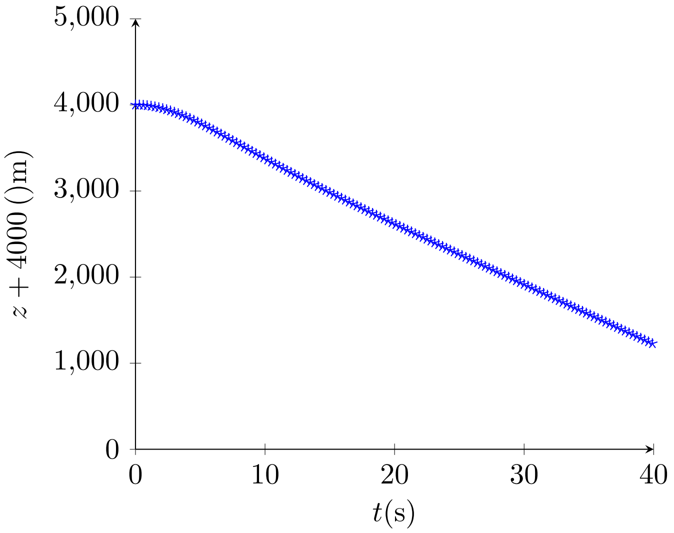


Figure 7 – Position en fonction du temps dans le cas de frottements quadratiques

9 Quel type de frottements est le plus approprié pour l'étude du mouvement d'un parachutiste ?

Il faut faire appel à la mécanique des fluides pour répondre à cette question. En effet, on peut changer de point de vue, et plutôt que de considérer la chute du parachutiste dans l'air, on étudie l'écoulement de l'air autour du parachutiste fixe.
C'est écoulement est souvent complexe, il n'est pas seulement caractérisé par la vitesse relative v du fluide, mais par un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{v\,d\,\rho}{\eta} \qquad (28) \quad \begin{cases} R_e : \text{nombre de Reynolds sans dimension.} \\ v : \text{vitesse relative de fluide en m.s}^{-1}. \\ d : \text{taille caractéristique de l'écoulement en m.} \\ \rho : \text{masse volumique du fluide en kg.m}^{-3}. \\ \eta : \text{viscosité du fluide en Pa.s.} \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs types d'écoulement :
— si $R_e < 1$, l'écoulement est dit laminaire. Dans ce cas, la force de frottements fluides est proportionnel à la vitesse : frottements linéaires, $\overrightarrow{f} = -k\,\overrightarrow{v}$;
— si $R_e > 10^3$, l'écoulement est dit turbulent. Alors la force de frottements fluides est quadratique : $\overrightarrow{f} = -k\,v\,\overrightarrow{v}$.

Dans le cas de la chute du parachutiste, le fluide est l'air, sa viscosité est d'environ $\eta = 1{,}7 \times 10^{-5}$Pa.s ; le nombre de Reynolds a de grande chance d'être supérieur à 10^3 : l'écoulement est turbulent et les frottements quadratiques.

Références

— "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ;
— Le site Culture Sciences Physiques de l'ENS de Lyon.
— : http ://owl-ge.ch/IMG/pdf/frottement.pdf