TD M21 : théorème du moment cinétique

Exercice 1 : calculs de moment cinétique

1. Soit un électron ayant une trajectoire circulaire autour du noyau d'un atome. On donne :
   – Le rayon de sa trajectoire : $r = 5.3 \times 10^{-11}$ m ;
   – Sa fréquence de rotation à vitesse constante : $f = 6.6 \times 10^{15}$ Hz ;
   – La masse de l'électron : $m_{\mathrm{e}} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.
   Calculer son moment cinétique par rapport au centre du noyau, donner le résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs (et utiliser la mémoire de votre calculatrice pour ne pas utiliser arrondir les résultats des calculs intermédiaires).

2. La Lune a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. On donne :
   – Le rayon de sa trajectoire : $r = 3.8 \times 10^{5}$ km ;
   – Sa période de révolution autour de la Terre : $T = 27.3$ jours ;
   – La masse de la Lune : $m_{\mathrm{L}} = 7.3 \times 10^{22}$ kg.
   Calculer le moment cinétique de la Lune par rapport au centre de la Terre avec les mêmes précautions.

Exercice 2 : Vitesse d'un satellite sur son orbite elliptique

On considère un satellite de masse 1 tonne en orbite elliptique autour de la Terre. Le satellite se maintient sur cette trajectoire car il est soumis à la force gravitationnelle qu'exerce sur lui la Terre.
Cette force est en permanence dirigée vers le centre de la Terre.
On note :
– O le centre de la Terre qui est un des foyers de l'ellipse ;
– C le centre de l'ellipse ;
– A l'apogée du satellite (point de l'orbite le plus éloignée de la surface de la Terre) ;
– P son périgée (point de l'orbite le plus proche de la surface de la Terre) ;
– A' le point de la surface de la Terre qui fait face à A, l'apogée du satellite ;
– P' le point de la surface de la Terre qui fait face à P, le périgée du satellite ;
– S le point tel que $\overrightarrow{CS}$, vertical dirigé vers le haut, représente le demi-petit axe de l'ellipse.

On donne les grandeurs suivantes :
– Distance $\mathrm{CS} = 16715$ km ;
– Distance $\mathrm{AA'} = 35000$ km ;
– Distance $\mathrm{PP'} = 350$ km ;
– Distance $\mathrm{OA'} = \mathrm{OP'} = R_{\mathrm{T}} = 6400$ km ;

On considère que le satellite est en mouvement dans un référentiel galiléen dont le centre est situé au centre de la Terre.

1. Réaliser une figure comportant toutes les indications de l'énoncé. Représenter le satellite en S avec sa vitesse $\overrightarrow{v}$ et les vecteurs polaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.
2. La vitesse en S est $v_S = 14650\,\mathrm{km.h^{-1}}$. Calculer le moment cinétique du satellite en S par rapport au point O (un angle permettant de repérer le satellite peut être utile).

3. En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver la vitesse du satellite à son apogée A et à son périgée P.

Exercice 3 : vitesse d'un enfant à la sortie d'un toboggan

Un enfant glisse assis le long d'un toboggan. Celui-ci est une portion de cercle de centre O et de rayon 2.7 m.
Le centre de gravité de l'enfant, noté G, glisse tout au long de la descente à 20 cm au dessus du toboggan.

L'angle que fait le rayon OG de la trajectoire de l'enfant avec l'horizontale est noté θ. Il est représenté sur la figure ci-contre.

Initialement, l'enfant s'élance d'une position $\theta_0 = 15°$, sans vitesse initiale.
En sortie du toboggan, l'angle θ vaut 90°.

On considère que tout frottement est négligeable.

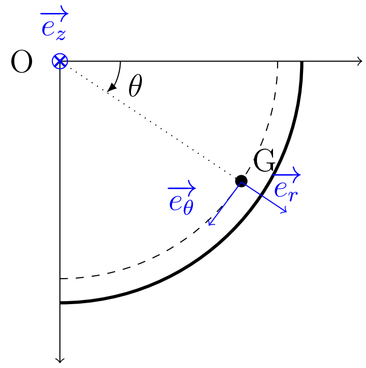

FIGURE 2 – Le toboggan

1. Indiquez sur le schéma les forces qui s'exerce sur G.
2. Appliquez le théorème du moment cinétique au point G afin de déterminer l'équation de son mouvement.
3. En déduire l'expression de la vitesse de l'enfant en fonction de l'angle θ.
   Indice
   En multipliant les termes de l'équation différentielle par une même grandeur, il sera possible de l'intégrer.
4. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter.

Exercice 4 : le pendule simple incliné

On réalise un pendule simple à l'aide d'un mobile autoporteur sur table à coussin d'air. Le mobile de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe O de la table.
Le mobile peut alors se déplacer sans frottement dans un plan xOy.

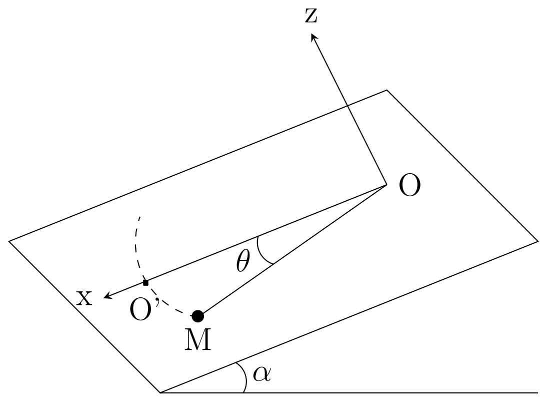

FIGURE 4 – Pendule simple incliné

1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O.
2. Identifier les forces et exprimer leur projection sur la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.
   Indice
   Le poids est une force verticale, $\overrightarrow{P}$ appartient donc au plan xOz. On projettera d'abord cette force dans la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ puis dans la base cylindrique.
3. Appliquer le théorème du moment cinétique afin d'établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations.
4. En déduire l'expression de la période des petites oscillations.
5. Le pendule est lancé depuis sa position d'équilibre O' avec une vitesse initiale v_0. Quel est l'angle maximal atteint (l'hypothèse des petites oscillations étant toujours valable) ?

Exercice 5 : mouvement tournant d'une masse accrochée à un ressort

On considère une table à coussin d'air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort.

La table forme le plan xOy, l'extrémité fixe du ressort est située en O.
Ci-contre, un schéma représente le dispositif vu de dessus.
Le champ de pesanteur est dirigé suivant -Oz : $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$. Le ressort a pour constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0.

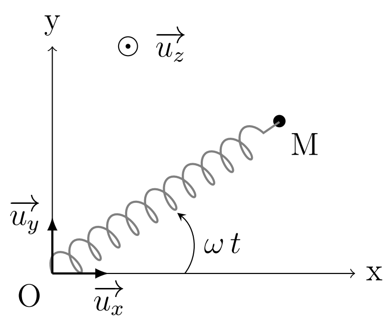

FIGURE 6 – Mobile autoporteur accroché à un ressort sur une table à coussin d'air horizontale

1. Faire un bilan des forces et montrer qu'il y a conservation du moment cinétique du point M par rapport à O.
2. A $t = 0$, on lâche le point M depuis l'axe des abscisses, le ressort ayant pour longueur 1.2 fois sa longueur à vide : $\overrightarrow{OM}(t=0) = 1.2\,\ell_0\,\overrightarrow{u_x}$; et une vitesse initiale nulle.
   2.1. Calculer le moment cinétique par rapport à O du point M. En déduire la nature de la trajectoire.
   2.2. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, établir l'expression de $OM(t)$ et préciser dans quel intervalle cette longueur évolue.

   Indices
   – Si une équation différentielle possède un second membre, il ne faut pas oublier de trouver une solution particulière de même forme que le second membre ;
   – Une équation différentielle du type $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$ admet une solution d'expression $x(t) = A\,\cos\omega_0\,t + B\,\sin\,\omega_0\,t$. Les conditions initiales permettent de déterminer A et B.
3. On lance à présent le mobile autoporteur pour lui donner un mouvement de rotation autour de l'axe Oz. Ainsi, on a :
   – $\overrightarrow{OM}(t=0) = \ell_1\,\overrightarrow{u_x}$;
   – $\overrightarrow{v_0} = \ell_1\,\omega\,\overrightarrow{u_y}$.
   Le mouvement étant toujours plan, on pourra travailler soit en coordonnées cartésiennes soit en coordonnées polaires.
   3.1. Exprimer le moment cinétique par rapport à O du mobile autoporteur : d'abord en fonction de r et $\dot{\theta}$, puis en fonction des conditions initiales.

   Indice

   Les forces qui s'exercent sur le mobile, donc leur moment, n'ont pas changées.
   3.2. Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique du mobile.
   Indice
   Écrire le théorème de l'énergie cinétique sur un déplacement élémentaire du mobile.
   3.3. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique puis donner l'expression de l'énergie mécanique en fonction :
   – Des conditions initiales ;
   – De r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, m, k et ℓ_0.
   3.4. Montrer que cette énergie peut être écrite sous la forme $E_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_\mathrm{peff}(r)$ où E_peff est appelée énergie potentielle effective et est fonction de r et de L, norme du vecteur moment cinétique.
   Donner son expression.
   3.5. Tracer l'allure de la fonction $E_\mathrm{peff}(r)$ et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s'éloigner du pôle d'attraction O.

Références

– "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ;
– "Précis Mécanique PCSI" - C.Clerc / P.Clerc - Bréal ;