M22 : Forces centrales
L'essentiel

Force centrale

L'expression d'une force centrale est $\overrightarrow{F} = \mathbf{F(r)}\overrightarrow{u_r}$, sa valeur, indépendante du temps, ne dépend que de r, distance entre le point qui subit la force et le centre de force.
Une force centrale est **conservative**.

Du fait que la force gravitationnelle ou la force électrostatique sont des exemples de forces centrales, on écrit souvent l'expression d'une force centrale de la manière suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$$

$K = -Gm_O m_M$ pour une force gravitationnelle ; $K = \dfrac{q_O q_M}{4\pi\epsilon_0}$ pour une force électrostatique.

Énergie potentielle

Une force centrale étant conservative, elle dérive d'une énergie potentielle que l'on peut écrire :

$$\boxed{E_P = \frac{K}{r} + cste}$$

On fixe l'origine des énergies potentielles là où on le souhaite.

Moment cinétique

Soit un point M soumis à une force centrale de centre de force O, alors le moment cinétique de M en O est constant.
En coordonnées cylindriques on a $\overrightarrow{L_O}(M) = mC^2\overrightarrow{e_z}$ avec $C = r^2\dot{\theta}$ appelée **constante des aires**. Ainsi :

- Le mouvement d'un point M soumis à une force centrale s'effectue dans un plan défini par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}(M)$.
- Le rayon $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales en des temps égaux (**loi des aires**). Cela signifie que la vitesse de balayage de l'aire, appelée vitesse aréolaire, est constante :

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}}$$

Énergie mécanique et énergie potentielle effective

L'énergie mécanique du point M soumis à une force centrale est constante.
Cette énergie ne peut s'exprimer qu'en fonction de la variable r :

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{Peff}(r)}$$

avec $E_{Peff}(r) = E_P(r) + \dfrac{mC^2}{r^2}$ est appelée énergie potentielle effective.

Cette énergie est un outil intéressant car la comparaison de la valeur de l'énergie mécanique du point M à son énergie potentielle effective permet de connaître la nature du mouvement du point M.

Mouvement de M dans le cas d'une force répulsive ($K > 0$)

L'énergie cinétique radiale $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ étant nécessairement positive, on a $E_M \geq E_{Peff} > 0$.
Le mouvement du point M s'effectue entre un r_{min} et l'∞, on parle d'un **état de diffusion**.

Mouvements de M dans le cas d'une force attractive $K < 0$)

Cette fois-ci E_{Peff} est soit positive soit négative, comme l'énergie mécanique. Plusieurs cas peuvent se présenter :
- Si $E_M > 0$, le point M se trouve dans un état de diffusion comme précédemment ;
- Si $E_M < 0$, le mouvement du point M se fait entre un r_{min} et un r_{max}, il s'agit dans le cas le plus général d'un **mouvement elliptique**, on parle d'**état lié**.

Équation polaire de la trajectoire

Selon le cas (force attractive ou répulsive), deux possibilités :
- Si $K > 0$:

$$\boxed{r = \frac{p}{e\cos\theta - 1}}$$

- Si $K < 0$:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

Avec dans les deux cas, $p = \left|\frac{mC^2}{K}\right|$ et $e = \left|\frac{AmC^2}{K}\right|$ (A = cste).

Dans le premier cas, on retrouve l'état de diffusion (hyperbole), car comme $r > 0$, $e > 1$.

Dans le deuxième cas, la valeur de e donne la nature du mouvement :
- Si $e = 0$, la trajectoire est un cercle de centre O de rayon p ($= r_0$ trouvé précédemment) (état lié).
- Si $0 < e < 1$, la trajectoire est une ellipse de foyer O (état lié).
- Si $e = 1$, La trajectoire est une parabole (état de diffusion).
- Si $e > 1$, La trajectoire est une hyperbole (état de diffusion).

Vitesse de libération

Dans le cas d'une force gravitationnelle, on définit la vitesse de libération d'un corps comme sa vitesse (en un point distant de r) lui permettant de s'échapper de l'attraction créé par le corps attracteur.
Cette vitesse existe sur une trajectoire parabolique $e = 1$.

On peut donner l'expression et la valeur de cette vitesse sur Terre :

$$\boxed{v_l = \sqrt{\frac{2\,G\,m_T}{R_T}} = 11 km.s^{-1}}$$

Trajectoire elliptique

Si on se place dans le cas de la force gravitationnelle exercée par le soleil sur les planètes su système solaire, la première loi de Kepler nous indique que chaque orbite de planète est elliptique.

Il existe deux points remarquables de cette orbite, le périhélie ($r_{min} = r_p = \dfrac{p}{1+e}$), position de la planète la plus proche du soleil, et l'aphélie ($r_{max} = r_a = \dfrac{p}{1-e}$), position la plus éloignée.

L'énergie mécanique de la planète peut être exprimée uniquement en fonction du demi-grand-axe de l'ellipse :

$$\boxed{E_M = -\frac{K}{2a}}$$

On peut aussi en déduire la vitesse de la planète sur son robite :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{K}{m}\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right)}}$$

On peut enfin retrouver la troisième loi de Kepler, à partir de la deuxième (loi des aires) :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}} \tag{58}$$

où m_O est la masse du soleil, astre attracteur.