Cours de mécanique 2
M22-Forces centrales

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Forces centrales conservatives **2**
2.1 Définition 2
2.2 Exemples 2

3 Mouvement général **3**
3.1 Moment cinétique 3
3.2 Énergie mécanique 4
3.2.1 Conservation de l'énergie mécanique 4
3.2.2 Définition d'une énergie potentielle effective 4
3.3 Mouvements possibles 5
3.3.1 Cas d'une force répulsive ($K > 0$) 5
3.3.2 Cas d'une force attractive ($K < 0$) 6
3.4 Équation polaire de la trajectoire 7
3.4.1 Force attractive $K < 0$ 7
3.4.2 Force répulsive $K > 0$ 7
3.5 Énergie mécanique et trajectoires 8

4 Études de trajectoires particulières **8**
4.1 Trajectoire parabolique et vitesse de libération 8
4.2 Trajectoire circulaire 8
4.3 Trajectoire elliptique et lois de Kepler 8
4.3.1 Expression de la vitesse sur la trajectoire 9
4.3.2 Troisième loi de Kepler 9

5 Références **13**

1 Introduction

Ce chapitre va être l'occasion de revoir deux forces que l'on connaît bien, la force gravitationnelle (dite de Newton) et la force électrostatique (dite de Coulomb). En effet, nous l'avons déjà dit, ces forces présentent des similitudes, notamment leur variation en $\frac{1}{r^2}$.

Dans ce chapitre, nous verrons les forces centrales conservatives, dont la force de Newton et celle de Coulomb font parties, et leurs caractéristiques ; puis nous étudierons le mouvement d'un point M soumis à une force centrale en remarquant la constance de certaines grandeurs.

2 Forces centrales conservatives

2.1 Définition

Une force centrale est une force qui s'écrit $\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques.
Cela signifie :
- que sa valeur ne dépend pas du temps ;
- que a valeur de dépend que de r, la distance de M (point qui subit la force) à O (point appelé centre de force) ;
- que sa droite d'action a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

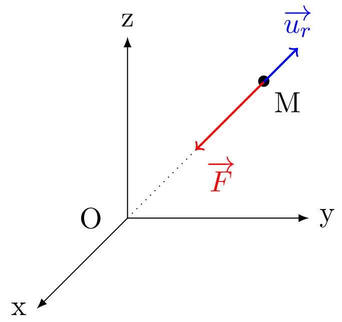

FIGURE 1 – M subit une force centrale de centre O

Cette force est conservative (le calcul de son travail ne dépend pas du chemin suivi), elle dérive donc d'une énergie potentielle :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P \quad \text{et ainsi} \quad F(r) = -\frac{dE_P}{dr}} \tag{1}$$

2.2 Exemples

- La force de Newton est une force centrale conservative :

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{m_O m_M}{r^2}\overrightarrow{e_r} \Longleftrightarrow \overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r} \tag{2}$$

$$\text{avec } K = -Gm_O m_M \text{ (K<0)}$$

- La force de Coulomb est une force centrale conservative :

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_O q_M}{r^2}\overrightarrow{e_r} \Longleftrightarrow \overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r} \tag{3}$$

$$\text{avec } K = \frac{q_O q_M}{4\pi\epsilon_0}$$

$K < 0$ si q_O et q_M sont de signe opposé ; $K > 0$ si q_O et q_M sont de même signe

- En utilisant le K défini ci-dessus, on pourra écrire l'énergie potentielle dont dérive ces deux forces de la manière suivante :

$$\boxed{E_P = \frac{K}{r} + \text{cste}} \tag{4}$$

où la constante sera définie en fonction de l'origine des énergies potentielles (souvent on choisira que $E_P(r \to \infty) = 0$.

3 Mouvement général d'un point M soumis à une force centrale conservative

Nous allons voir que cette notion de force centrale a des conséquences quant à la conservation de certaines grandeurs physiques, que l'on peut traduire en terme de mouvement.

3.1 Moment cinétique

Nous allons montrer que le fait que le point M ne soit soumis qu'à une force centrale rend son **moment cinétique constant**.
Appliquons le théorème du moment cinétique en O dans le référentiel galiléen $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = r\overrightarrow{e_r} \wedge F(r)\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{0} \tag{5}$$

Le fait que le moment cinétique soit constant à deux conséquences :

- La première est que le **mouvement du point M est plan** : en effet, $\overrightarrow{L_O}(M) = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{\text{cste}}$ implique que le point M se déplace constamment dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L_O}(M)$ (plan défini par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$).

- La deuxième conséquence est que l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle au temps : c'est la **loi des aires**.

  - Trouvons tout d'abord l'expression de la constante des aires C, liée au moment cinétique, en exprimant le moment cinétique en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{L_O}(M) = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M) = m\,r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} \tag{6}$$

    On note généralement $\overrightarrow{L_O}(M) = m\,C\,\overrightarrow{e_z}$ avec $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$.

  - Exprimons maintenant l'aire balayée par le rayon vecteur pendant un temps dt :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}OM \times v\,dt = \frac{1}{2}r \times r\dot{\theta}\,dt \tag{7}$$

    car on peut voir cette portion infinitésimale d'aire comme un triangle de hauteur r et de base $v\,dt$.

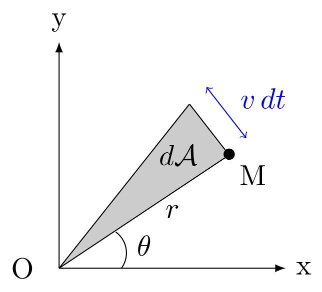

FIGURE 2 – Aire balayée par OM pendant dt

    Ainsi :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2} \tag{8}$$

    Donc :

$$\boxed{\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2}t + \text{cste}} \tag{9}$$

Remarque
La grandeur $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ se nomme parfois vitesse aréolaire, vitesse de balayage d'une aire.

3.2 Énergie mécanique

3.2.1 Conservation de l'énergie mécanique

Le fait que la force centrale soit conservative implique que l'énergie mécanique du point M est conservée au cours du mouvement.
En effet, d'après le théorème de l'énergie cinétique, pour le point M qui se déplace entre la position A et la position B :

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{AB}(\overrightarrow{F}) \tag{10}$$

Or comme la force $\overrightarrow{F}$ est conservative, on peut définir une énergie potentielle telle que :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = E_P(A) - E_P(B) \tag{11}$$

En effet :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B F(r)dr = \int_A^B \frac{K}{r^2}\,dr = \left[-\frac{K}{r}\right]_A^B = E_P(A) - E_P(B) \tag{12}$$

Donc en deux positions quelconques A et B du point M :

$$E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B) = \text{cste} \tag{13}$$

On peut donc écrire :

$$E_{\mathrm{M}} = E_C + E_P = \text{cste} \tag{14}$$

Si cette énergie est constante c'est qu'elle a à tout instant la valeur qu'elle avait dans l'instant initial : on peut donc déterminer sa valeur à partir des conditions initiales.

3.2.2 Définition d'une énergie potentielle effective

On peut exprimer cette énergie mécanique en fonction de l'unique variable r. On a :

$$E_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(r) \tag{15}$$

Car nous avons dit que l'énergie potentielle ne dépendait que de r $\left(E_P = \frac{K}{r} + \text{cste}\right)$.

On peut exprimer la vitesse en coordonnées polaires :

$$E_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\theta}^{\,2}) + E_P(r) \tag{16}$$

Car $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, si on porte cette expression au carré, le terme "2ab" fait apparaître le produit scalaire $\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$ qui est nul.

Enfin on peut faire apparaître la constante des aires et ainsi définir une nouvelle énergie potentielle :

$$\boxed{E_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2\,r^2} + E_P(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\mathrm{Peff}}(r)} \tag{17}$$

$E_{\text{Peff}}(r) = E_P(r) + \dfrac{mC^2}{2\,r^2}$ est appelée énergie potentielle effective, elle comprend l'énergie potentielle et une partie de l'énergie cinétique du point M.

Le problème se résume alors à l'étude d'un point matériel de masse m dont la position est décrite par un seul degré de liberté, r ; et soumis à une force conservative dont l'énergie potentielle est E_{peff}.

Pourquoi définir une énergie potentielle effective ?
Cette énergie, qui n'a pas réellement de sens physique, va permettre par son étude, de trouver les formes de mouvements possibles pour le point M en fonction du signe de K et de la valeur de la constante E_{M}.

3.3 Étude des mouvements possibles et conditions d'existence

Nous allons utiliser l'énergie potentielle effective définie précédemment pour identifier les mouvements possibles. Selon l'allure de $E_{\text{Peff}} = f(r)$ et la valeur de l'énergie mécanique de M, nous distinguons plusieurs cas :

3.3.1 Cas d'une force répulsive ($K > 0$)

La fonction $E_{\text{Peff}} = f(r)$ a l'allure suivante :

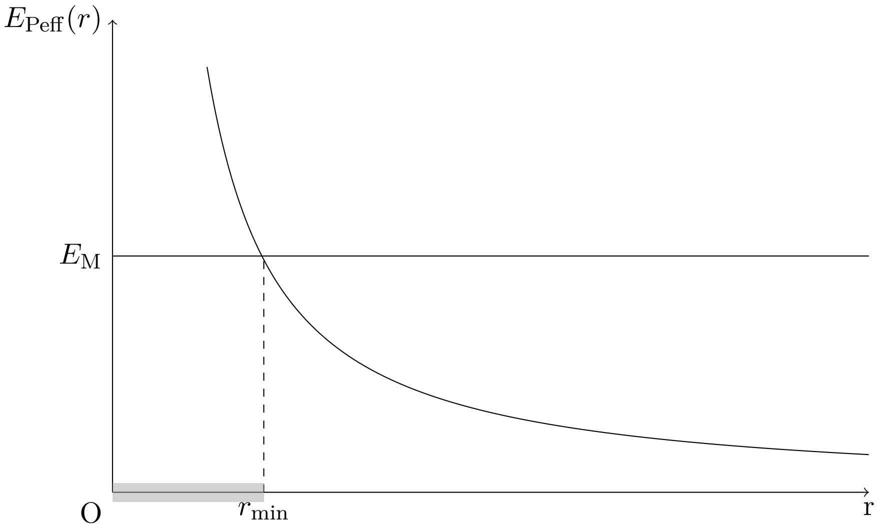

FIGURE 3 – Allure de $E_{\text{Peff}}(r)$ dans le cas d'une force répulsive

Rappelons la relation donnant l'énergie mécanique : $E_{\text{M}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{Peff}}(r)$
Ainsi, comme l'énergie cinétique radiale est nécessairement positive, pour qu'il y ait mouvement il faut que $E_{\text{M}} \geq E_{\text{Peff}}$.

Le mouvement ne peut donc se faire qu'entre $r = r_{\text{min}}$ et l'∞, ce mouvement est non borné :
Lorsque la force centrale est répulsive, on parle d'un état de diffusion.

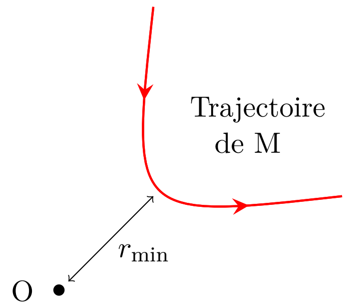

FIGURE 4 – Etat de diffusion

Pour trouver la valeur de r_{min}, il faut résoudre l'équation :

$$E_{\text{M}} = E_{\text{Peff}} \Longleftrightarrow E_{\text{M}} - \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r} = 0 \tag{18}$$

Ce qui équivaut à l'équation du second degré suivante :

$$E_{\text{M}}\, r^2 - K\, r - \frac{mC^2}{2} = 0 \tag{19}$$

Cette équation admet deux solutions, la solution positive donne l'expression de r_{min} :

$$r_{\text{min}} = \frac{1}{2E_{\text{M}}} \left(K + \sqrt{K^2 + 2mC^2 E_{\text{M}}} \right) \tag{20}$$

3.3.2 Cas d'une force attractive ($K < 0$)

Regardons une nouvelle fois la forme de la courbe $E_{\text{Peff}} = f(r)$:

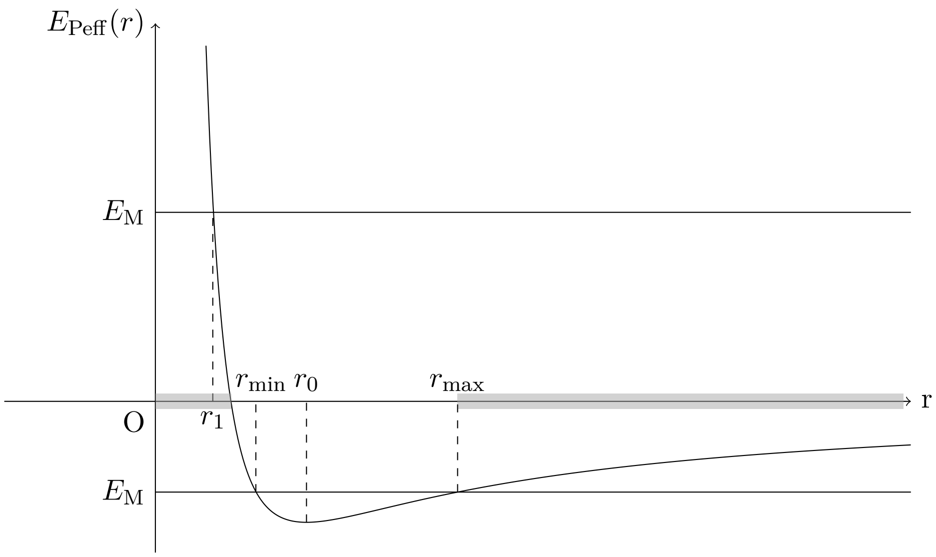

FIGURE 5 – Allure de $E_{\text{Peff}}(r)$ dans le cas d'une force attractive

Cette fois, plusieurs cas sont possibles selon le signe de l'énergie mécanique du point M :

– Si $E_{\mathrm{M}} > 0$, on se retrouve dans la même configuration que lorsque $K > 0$, C'est à dire que le seul mouvement possible s'effectue entre r_1 et l'∞, on a encore à faire à un **état de diffusion**.

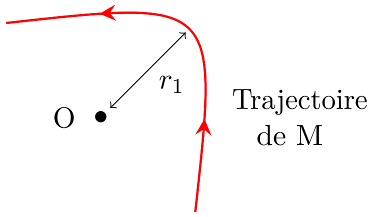

FIGURE 6 – État de diffusion lorsque $K < 0$

– Si $E_{\mathrm{M}} < 0$, le mouvement est borné entre $r_{\min}$ et $r_{\max}$, on parle alors d'un **état lié**. le mouvement est dans ce cas elliptique.

  $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont solutions de l'équation du second degré :

$$E_{\mathrm{M}}\, r^2 - K\, r - \frac{mC^2}{2} = 0 \tag{21}$$

  Il existe un cas particulier, où l'équation précédente admet une solution double (discriminant du polynôme nul) ; dans ce cas l'état est toujours lié, avec un $r = r_0 = \text{cste}$: le mouvement est circulaire autour de O.

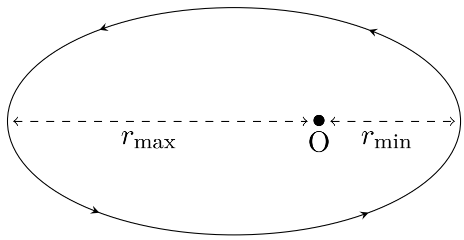

FIGURE 7 – État lié lorsque $K < 0$

3.4 Équation polaire de la trajectoire

En repartant de l'expression de l'énergie mécanique, il est possible, à l'aide d'un changement de variable et de quelques astuces, de trouver l'équation $r = f(\theta)$ des trajectoires évoquées ci-dessus.
On utilise notamment le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ qui nous permet d'obtenir une équation différentielle en u que nous savons résoudre.

Nous nous contenterons de donner ici les équations polaires finalement obtenues :

3.4.1 Force attractive $K < 0$

$$\text{Si } K < 0,\ r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \text{ avec } p = \left|\frac{mC^2}{K}\right| \text{ et } e = \left|\frac{AmC^2}{K}\right| (A = \text{cste}) \tag{22}$$

Cette équation polaire est celle d'une conique, la valeur de l'excentricité e donne la forme de la conique :

- Si $e = 0$, la trajectoire est un cercle de centre O de rayon p (r_0 trouvé précédemment, état lié).
- Si $0 < e < 1$, la trajectoire est une ellipse de foyer O (état lié).
- Si $e = 1$, La trajectoire est une parabole (état de diffusion).
- Si $e > 1$, La trajectoire est une hyperbole (état de diffusion, voir figure 6).

3.4.2 Force répulsive $K > 0$

$$\text{Si } K > 0,\ r = \frac{p}{e\cos\theta - 1} \text{ avec } p \text{ et } e \text{ positifs} \tag{23}$$

De plus dans ce cas, on a forcément $e > 1$ puisque $r > 0$: on obtient donc une hyperbole (état de diffusion, voir figure 4).

3.5 Énergie mécanique et trajectoires

En manipulant l'énergie mécanique, il est possible de l'exprimer en fonction des paramètres déjà utilisés pour décrire l'équation polaire de la trajectoire. On obtient :

$$E_{\mathrm{M}} = -\frac{|K|}{2p}(1-e^2) = \frac{K^2}{2\,m\,C^2}(e^2-1) \tag{24}$$

Etant donné que les valeur de E_M dépendent directement des valeurs de e, la valeur de E_M nous indique directement la nature de la trajectoire :

- $e < 1 \Longleftrightarrow E_M < 0$: trajectoire elliptique (voir circulaire) ;
- $e = 1 \Longleftrightarrow E_M = 0$: trajectoire parabolique ;
- $e > 1 \Longleftrightarrow E_M > 0$: trajectoire hyperbolique.

4 Études de trajectoires particulières

4.1 Trajectoire parabolique et vitesse de libération

On parle de vitesse de libération lorsqu'un corps, soumis à l'attraction gravitationnelle d'un autre corps et distant de r, a une vitesse suffisante pour s'"échapper" de cette attraction.
On se place donc dans le cas d'une force Newtonienne attractive ($K < 0$).

Cette vitesse de libération est atteinte si le corps est dans un état de diffusion, donc sur une trajectoire parabolique.
Ainsi, $e = 1$ et d'après l'expression de l'énergie mécanique vue précédemment, $E_{\mathrm{M}} = 0$.
Ce qui donne :

$$\frac{1}{2}m\,v_l^2 + \frac{K}{r} = 0 \Longleftrightarrow v_l = \sqrt{\frac{-2K}{m\,r}} \tag{25}$$

Plaçons nous dans le cas de la Terre et d'un satellite de masse m, sa vitesse de libération depuis la surface terrestre est :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\,G\,m_T\,m}{m\,R_T}} = \sqrt{\frac{2\,G\,m_T}{R_T}} = 11\,\mathrm{km.s^{-1}} \tag{26}$$

4.2 Trajectoire circulaire (voir exercice 3 du TD M22)

4.3 Trajectoire elliptique et lois de Kepler

Cette trajectoire est importante : les lois de Kepler et en particulier la première explique que chaque planète du système solaire décrit une orbite elliptique autour du soleil qui constitue un des foyers de l'ellipse.
D'après ce qui a été vu, on a $r = \dfrac{p}{1 + e\,\cos\theta}$. Ainsi :

- La planète se rapproche du soleil jusqu'au périhélie, position de la planète la plus proche du soleil sur l'orbite, définie par :

$$r_p = \frac{p}{1+e} \tag{27}$$

- La planète s'éloigne du soleil jusqu'à aphélie, position de la planète la plus éloignée du soleil sur l'orbite, définie par :

$$r_a = \frac{p}{1-e} \tag{28}$$

4.3.1 Expression de la vitesse sur la trajectoire

– On peut tout d'abord exprimer l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe de l'ellipse : d'après le schéma ci-contre :

$$2a = r_p + r_a \tag{29}$$

$$\Longleftrightarrow 2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \tag{30}$$

Car sur la figure 8, la position P correspond à un angle $\theta = 0$, la position A a un angle de $\theta = \pi$.

D'où :

$$p = a(1-e^2) \tag{31}$$

– Remplaçons ceci dans l'expression de l'énergie mécanique (equation (24)) :

$$E_{\mathrm{M}} = -\frac{|K|}{2a} = \frac{K}{2a} \tag{32}$$

Ce résultat est important : dans une trajectoire elliptique, **l'énergie mécanique ne dépend que du demi grand-axe de l'ellipse**.

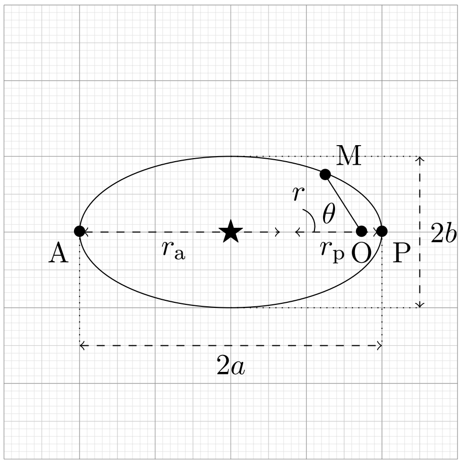

FIGURE 8 – Trajectoire elliptique

– Écrivons à présent l'expression donnant l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{K}{r} = \frac{K}{2a} \tag{33}$$

Donc :

$$v = \sqrt{\frac{K}{m}\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right)} \tag{34}$$

$$= \sqrt{G\, m_O \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{35}$$

$$= \sqrt{G\, m_O \left(\frac{2a - r}{a\, r}\right)} \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

Ainsi au périhélie et à l'aphélie, on a :

$$v_P = \sqrt{G\, m_O \left(\frac{2a - r_P}{a\, r_P}\right)} \qquad v_A = \sqrt{G\, m_O \left(\frac{2a - r_A}{a\, r_A}\right)} \tag{38}$$

On retrouve bien, comme $r_P < r_A$, le fait que $v_P > v_A$.

4.3.2 Troisième loi de Kepler

Cherchons à retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{Gm_O}$.

– La loi des aires établie précédemment a été exprimée mathématiquement sous la forme :

$$\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2} \times t \tag{39}$$

– Donc sur la période T de parcourt de l'ellipse, le point M a balayé une aire égale à l'aire de l'ellipse soit $\mathcal{A} = \pi\, a\, b$.
  On a donc :

$$\pi\, a\, b = \frac{C}{2} \times T \Longleftrightarrow \frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2\, b^2}{C^2} \tag{40}$$

– Enfin, on peut démontrer que $b^2 = p\, a$ et on sait que $p = \dfrac{mC^2}{|K|}$.

$$\frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2\, a\, m\, C^2}{|K|\, C^2} \Longleftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|K|} \tag{41}$$

– Finalement sachant que $K = -G\, m_O\, m < 0$ dans le cas d'un mouvement elliptique (force attractive), on obtient :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_O}} \tag{42}$$

  qui est bien l'expression de la troisième loi de Kepler (qui ne dépend que de masse du point attracteur m_O).

Cette loi de Kepler est valable dans le cas de la trajectoire circulaire, on remplace alors a par r_0, rayon de la trajectoire circulaire.

Annexe 1 : établissement de l'équation de la trajectoire

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{C} + E_\mathrm{P} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{r}^2 + \frac{m\, C^2}{2\, r^2} + \frac{K}{r} \tag{43}$$

On cherche l'expression de $r(\theta)$, donc il faut transformer le $\dot{r}$.

On a : $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \times \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{C}{r^2}$.

Donc l'expression de l'énergie mécanique devient :

$$E_\mathrm{m} = \frac{m\, C^2}{2\, r^4} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{m\, C^2}{2\, r^2} + \frac{K}{r} \tag{44}$$

Utilisons un changement de variable : posons $u = \dfrac{1}{r}$ ($r = \dfrac{1}{u}$), on a alors $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.
Alors :

$$E_\mathrm{m} = \frac{m\, C^2\, u^4}{2} \times \frac{1}{u^4} \times \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{m\, C^2\, u^2}{2} + K\, u \tag{45}$$

$$= \frac{m\, C^2}{2} \left(\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right) + K\, u \tag{46}$$

Utilisons à présent la constance de l'énergie mécanique :

$$E_{\rm m} = \text{cste} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}E_{\rm m}}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Longleftrightarrow m\,C^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) + K\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{47}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\left(m\,C^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) + K\right) = 0 \tag{48}$$

Il y a donc deux possibilités :

- Soit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 0$ ce qui conduit à une fonction $u(\theta)$ (et donc $r(\theta)$) constante : ceci est la caractéristique d'une trajectoire circulaire.
- Soit $m\,C^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) + K = 0$ qui est une équation différentielle du second ordre que l'on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{-K}{m\,C^2} \tag{49}$$

  On sait résoudre cette équation, la solution globale est une addition d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène. on obtient :

$$u(\theta) = -\frac{K}{m\,C^2} + A\,\cos(\theta - \theta_0) \tag{50}$$

  où A et θ_0 sont deux constantes déterminées par les conditions initiales. θ_0 définit l'axe de la conique, généralement on prend $\theta_0 = 0$.
- On en déduit :

$$\frac{1}{r} = -\frac{K}{mC^2} + A\,\cos(\theta - \theta_0) = \frac{-K + m\,C^2\,A\,\cos(\theta - \theta_0)}{m\,C^2} \tag{51}$$

  Ce qui donne :

$$r = \frac{m\,C^2}{-K + m\,C^2\,A\,\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\dfrac{m\,C^2}{|K|}}{-\text{sign}(K) + \dfrac{A\,m\,C^2}{|K|}\cos(\theta - \theta_0)} \tag{52}$$

  On note généralement cette équation de trajectoire de la manière suivante :

$$r = \frac{p}{\epsilon + e\,\cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{p\,C^2}{|K|} \quad \text{et} \quad e = \frac{A\,m\,C^2}{|K|} \tag{53}$$

$$\text{et} \quad \epsilon = \pm 1 \quad \text{(selon le signe de } K) \tag{54}$$

Annexe 2 : énergie mécanique en fonction de e

Pour obtenir cette expression, il faut repartir de $E_m = \frac{m\,C^2}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right) + K\,u$ et remplacer $u(\theta)$ par son expression, soit $u(\theta) = -\frac{K}{m\,C^2} + A\,\cos(\theta - \theta_0)$.

On obtient :

$$E_{\rm M} = \frac{K^2}{2\,m\,C^2}(e^2 - 1)$$

Annexe 3 : paramètres d'une ellipse

Demi grand-axe a

On a établi que $a = \dfrac{p}{1-e^2}$

Distance focale c

C'est la distance entre le centre de l'ellipse et un des foyers (le centre de force) :

$$c = a - OP = a - \frac{p}{1+e} = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = \frac{p\,e}{1-e^2} \tag{55}$$

Excentricité e

L'excentricité de l'ellipse peut alors s'exprimer de la façon suivante : $e = \dfrac{c}{a}$.

Demi-petit axe b

On cherche ici à relier b à a et p.
On connaît une relation générale des coniques qui donne : $a^2 = b^2 + c^2$.
On peut alors écrire :

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \tag{56}$$

D'où :

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{ap} \quad \text{ou} \quad b^2 = a\,p \tag{57}$$

5 Références

– "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ;
– "Précis Mécanique PCSI" - C.Clerc / P.Clerc - Bréal ;