M23 : Changement de référentiel L'essentiel

Formule de Varignon Elle permet de relier la variation dans le temps d'un vecteur dans un référentiel $\mathcal{R}$ fixe avec celle de ce même vecteur dans un référentiel $\mathcal{R}'$, en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{U}}$$

Loi de composition des vitesses

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\text{absolue}} = \overrightarrow{v}_{\text{entrainement}} + \overrightarrow{v}_{\text{relative}}}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}_{\text{a}} &= \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}\\
\overrightarrow{v}_{\text{e}} &= \overrightarrow{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\\
\overrightarrow{v}_{\text{r}} &= \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}
\end{aligned}$$

La vitesse d'entrainement est la vitesse qu'aurait M s'il était fixe dans le référentiel en mouvement.

Loi de composition des accélérations

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{\text{a}} = \overrightarrow{a}_{\text{r}} + \overrightarrow{a}_{\text{e}} + \overrightarrow{a}_{\text{c}}}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}_{\text{a}} &= \overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}}\\
\overrightarrow{a}_{\text{r}} &= \overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'}\\
\overrightarrow{a}_{\text{e}} &= \overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})\\
\overrightarrow{a}_{\text{c}} &= 2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}
\end{aligned}$$

Attention, $\overrightarrow{a}_{\text{e}} \neq \dfrac{d\overrightarrow{v}_{\text{e}}}{dt}$.

Cas d'un mouvement de translation Comme $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\text{entrainement}} = \overrightarrow{v}(O')_{/\mathcal{R}} \quad ; \quad \overrightarrow{a}_{\text{entrainement}} = \overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}} \quad ; \quad \overrightarrow{a}_{\text{coriolis}} = \overrightarrow{0}}$$

Cas d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe Soit une rotation uniforme autour de l'axe Oz : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\text{e}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_{y'}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{\text{e}} = -r\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_{x'}} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{HM}}$$

Si H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Référentiel galiléen ou non Un référentiel est galiléen si la première loi de Newton y est vérifiée.
Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen

$$\boxed{\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = m\,\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'}}$$

Avec :
$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a}_e$ une force virtuelle appelée force d'inertie d'entraînement ;
$\overrightarrow{F_{ic}} = -m\,\overrightarrow{a}_c$ une force virtuelle appelée force d'inertie de Coriolis.

RFD dans le référentiel tournant d'une rotation uniforme Il y a équilibre du point M dans ce référentiel, la relation entre la tension qui maintient le point M sur sa trajectoire est la force d'inertie d'entraînement est la suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = -\overrightarrow{T} = m\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{HM}}$$

Cette force d'inertie d'entrainement représente la force centrifuge ressentie par le point M lors de sa rotation.

Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}})}$$

Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen

$$\boxed{E_C(B)_{/\mathcal{R}'} - E_C(A)_{/\mathcal{R}'} = W_{AB}(\overrightarrow{F})_{/\mathcal{R}'} + W_{AB}(\overrightarrow{F_{ie}})_{/\mathcal{R}'}}$$

Car la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.