

Cours de mécanique 2

M24-Système isolé à deux corps

Table des matières

1	Introduction	2
2	Description et éléments cinétiques	2
2.1	Centre d'inertie du système	2
2.2	Résultante cinétique	2
2.3	Moment cinétique	3
2.4	Référentiel barycentrique	3
2.5	Théorème de la résultante cinétique	3
2.6	Théorème du moment cinétique	3
3	Composition de mouvement	3
3.1	Mouvement du centre d'inertie	3
3.2	Mouvement relatif	4
4	Cas du système de points isolés	4
4.1	PFD dans le référentiel barycentrique	4
4.2	Notion de mobile réduit	4
4.3	Mouvement de M_1 et M_2	5
4.4	Exemples de systèmes particuliers	5
4.4.1	Le système Terre-Soleil	5
4.4.2	Cas d'une molécule diatomique	5
5	Les collisions	6
5.1	Description du problème	6
5.2	Conservation de la quantité de mouvement	6
5.3	Collision élastique	6
5.3.1	Collision élastique à une dimension dite directe	7
5.3.2	Collision élastique à deux dimensions	8
5.4	Collision inélastique	10

1 Introduction

Après avoir étudié le mouvement d'un point matériel, sur la route qui nous mène à la mécanique du solide, on peut considérer le système à N points matériels le plus simple : le système à deux corps.

En physique, ce problème à deux corps est très important, on peut remarquer que les forces que nous connaissons sont des forces qui s'exercent entre deux corps (gravitation, force électromagnétique, ...).

Aussi, on rencontre souvent dans la nature des systèmes physiques à deux corps : la Terre et la Lune, l'électron et le proton dans un atome d'hydrogène, une molécule diatomique de gaz ...

Après avoir exposé le problème de façon générale, nous nous limiterons aux systèmes à deux corps isolés entre lesquels s'exerce une force d'interaction.

2 Description et éléments cinétiques

2.1 Centre d'inertie du système

Soit deux points M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2 en interaction et en mouvement dans un référentiel (\mathcal{R}) de centre O .

Le centre d'inertie du système est le barycentre des points M_1 et M_2 affectés de leur masse.

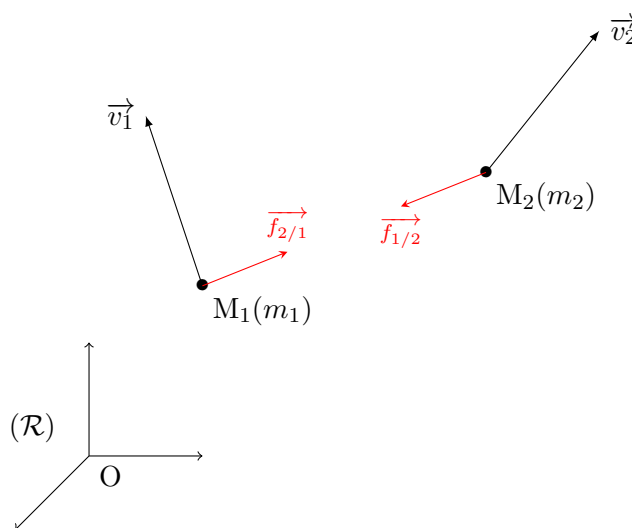


FIGURE 1 – Système de deux points en interaction

Ainsi si G est le centre d'inertie :

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{OG} = m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} \quad (1)$$

$$\iff m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \quad (2)$$

Car la définition donnée en (1) est valable pour n'importe quel point O , donc en particulier pour le point G .

2.2 Résultante cinétique

On appelle **résultante cinétique** la somme des quantités de mouvement des point M_i par rapport au référentiel (\mathcal{R}) :

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (3)$$

D'après la définition du centre d'inertie, on montre que cette résultante cinétique est égale à :

$$\boxed{\vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{v}(G)} \quad (4)$$

La résultante cinétique du système est la quantité de mouvement d'un point fictif situé en G qui porte toute la masse du système.

2.3 Moment cinétique

De la même façon on peut définir le moment cinétique du système par rapport, par exemple, au point O :

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2} \quad (5)$$

2.4 Référentiel barycentrique

Le référentiel barycentrique, noté (\mathcal{R}^*) , est le référentiel lié au centre de gravité G du système de points matériels et animé d'une vitesse $\vec{v}(G)$ par rapport au référentiel (\mathcal{R}) .

Le référentiel barycentrique n'est en général **pas galiléen**.

2.5 Théorème de la résultante cinétique

Ce théorème remplace le principe fondamental de la dynamique pour des systèmes à N points matériels.

On a :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}} \quad (6)$$

Ces sont bien les forces extérieures qui interviennent dans ce théorème, ce ne sont pas les forces d'interaction entre M_1 et M_2 .

Cas du système isolé

Si le système de points matériels est isolé, qu'aucune force extérieure ne s'exerce sur celui-ci alors $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \iff \vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{v}(G) = \text{cste.}$

La vitesse du centre d'inertie est constante dans le référentiel (\mathcal{R}) , G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à (\mathcal{R}) : **le référentiel barycentrique est dans ce cas galiléen.**

2.6 Théorème du moment cinétique

On a :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})} \quad (7)$$

Cas du système isolé

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$ et le moment cinétique du système se conserve.

3 Composition de mouvement

Pour étudier le mouvement de ce système de points matériels, on étudie :

3.1 Mouvement du centre d'inertie

Le mouvement de son centre d'inertie G à l'aide des théorèmes définis précédemment :
On prend en compte les actions extérieures au système mais pas les forces d'interaction entre les particules du système.

3.2 Mouvement relatif

En plus de ce mouvement du centre de gravité G du système, il faut ajouter le mouvement relatif de M_2 par rapport à M_1 .

On peut définir une position relative :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} \quad (8)$$

De même qu'une vitesse et une accélération relative :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (9)$$

4 Cas du système de points isolés

On se place dans le cas d'un système de deux points matériels isolés, il n'y a donc pas de force extérieure qui agit sur le système : le point G à un mouvement rectiligne uniforme et le référentiel barycentrique est galiléen.

4.1 PFD dans le référentiel barycentrique

On peut alors utiliser le principe fondamental de la dynamique et l'appliquer aux points M_1 et M_2 dans le référentiel (\mathcal{R}^*) .

On étudie les systèmes M_1 et M_2 . La force qui s'exerce sur M_1 est $\vec{f}_{2/1}$, celle qui s'exerce sur M_2 est $\vec{f}_{1/2}$.

Le PFD donne :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = \vec{f}_{2/1} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \vec{f}_{1/2} \end{cases} \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = \frac{\vec{f}_{2/1}}{m_1} \quad (a) \\ \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \frac{\vec{f}_{1/2}}{m_2} \quad (b) \end{cases} \quad (11)$$

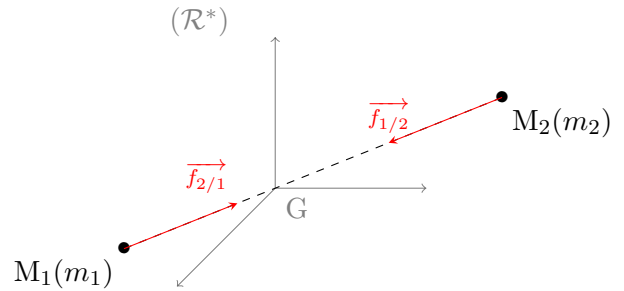


FIGURE 2 – Ce qu'il se passe dans le référentiel barycentrique

4.2 Notion de mobile réduit

Soustrayons membre à membre les deux équations de (11) : (b) - (a) ; et reprenons la notation $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{1/2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \quad \text{car } \vec{f}_{2/1} = -\vec{f}_{1/2} \quad (12)$$

On peut poser $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \Leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et écrire :

$$\boxed{\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{1/2}} \quad (13)$$

Dans le référentiel barycentrique galiléen, le problème à deux corps se réduit à l'étude du mouvement d'un point M de masse μ , appelée masse réduite du système, dont la position est repérée par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et qui est soumis à une force $\overrightarrow{f_{1/2}}$.

On se retrouve donc à un problème de corps soumis à une force centrale.

Ainsi on peut reprendre les lois de conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique pour obtenir l'équation du mouvement de M , de M_1 et de M_2 (voir ci-dessous).

4.3 Mouvement de M_1 et M_2

Les mouvements des points du système sont alors déductibles de celui de M .

En effet :

$$\begin{cases} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} &= \vec{0} & \text{(définition du barycentre)} \\ \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} & \text{(définition du point fictif)} \end{cases} \quad (14)$$

Ces deux relations combinées, nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \end{cases} \quad (15)$$

Les trajectoires de M_1 , M_2 et M dans le référentiel barycentrique se déduisant les unes des autres, on dit qu'elles sont **homothétiques**.

4.4 Exemples de systèmes particuliers

4.4.1 Le système Terre-Soleil

Soit M_2 le Soleil et M_1 la Terre. Dans ce cas la masse du Soleil est tellement grande que l'on a $\overrightarrow{GM_2} \rightarrow 0$ et $\overrightarrow{GM_1} \simeq \overrightarrow{GM}$.

Le Soleil semble pratiquement immobile et son centre est pratiquement le centre de gravité du système. On retrouve alors pour la Terre le principe fondamental de la dynamique classique

$m_1 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{2/1}$: elle tourne autour du soleil sur une orbite elliptique dont le Soleil est un des foyers ([Animation 1](#)).

4.4.2 Cas d'une molécule diatomique

On a dans ce cas $m_1 = m_2$, le centre de gravité du système se retrouve au milieu de M_1M_2 . ([Animation 2](#)).

5 Les collisions

5.1 Description du problème

Nous allons une nouvelle fois nous intéresser au cas où les deux corps qui entrent en collision ne subissent pas de forces extérieures.

Le terme collision est à prendre au sens large, il n'y a pas forcément contact physique entre les corps (interaction répulsive). On emploiera néanmoins indifféremment les mots collision ou choc.

Ce qui est intéressant n'est pas l'interaction qui produit la collision : on considèrera que celle-ci se produit à courte portée et pendant un temps très court.

Nous ne voulons pas connaître la nature de cette interaction mais uniquement les **caractéristiques des corps avant et après collision**.

On considèrera pour ce qui suit que la masse des corps est constante et que leur nombre de varie pas.

5.2 Conservation de la quantité de mouvement

Comme nous l'avons dit précédemment dans le chapitre, si on considère le système des deux corps ne subissant pas de force extérieure, le théorème de la résultante cinétique donne :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \iff \vec{P} = \vec{cste} \quad (16)$$

Si on note \vec{p}_1 et \vec{p}_2 les quantités de mouvements des deux corps avant la collision, et \vec{p}'_1 et \vec{p}'_2 les quantités de mouvement des deux corps après collision, on a :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (17)$$

Nous ne pouvons pas en dire davantage.

Cas où l'une des deux particules est immobile

Dans cette configuration, on obtient une information supplémentaire : tout se passe dans un plan. En effet, si le corps 2 est immobile, la relation (17) devient : $\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$, un des vecteurs étant la somme des deux autres, la collision est plane :

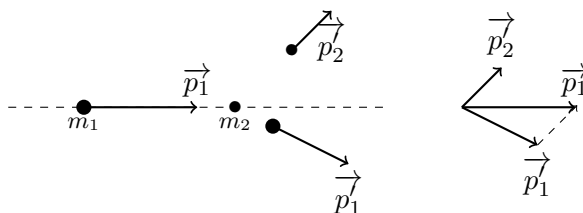


FIGURE 3 – Si un des deux corps est initialement immobile : collision plane

5.3 Collision élastique

Une collision est élastique lorsqu'en plus de la conservation de la quantité de mouvement, il y a conservation de l'énergie cinétique des particules.

Cela se produit quand il n'y a pas de déformation des corps, pas d'augmentation de leur énergie interne.

Nous allons nous intéresser à différents cas, le but étant de trouver les vitesses des particules \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 après le choc.

5.3.1 Collision élastique à une dimension dite directe

On considère que les corps qui entrent en collision sont en mouvement suivant un axe horizontal :

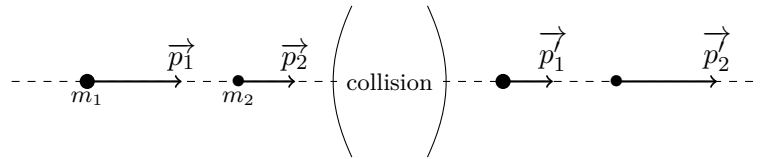


FIGURE 4 – Collision directe

Objectif : on cherche les expressions des vitesses des deux corps après collision soit v'_1 et v'_2 .

Cas général Écrivons les deux lois de conservation connues (la conservation de la quantité de mouvement a été écrite en projection sur l'axe horizontal) :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (19)$$

Ces équations deviennent :

$$m_1 (v'_1 - v_1) = m_2 (v_2 - v'_2) \quad (20)$$

$$m_1 (v_1'^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_2'^2) \quad (21)$$

On divise membre à membre (21) par (20), sachant que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on obtient :

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \quad (22)$$

(22) nous donne $v'_2 = v_1 + v'_1 - v_2$ que l'on remplace dans (18) :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 (v_1 + v'_1 - v_2) \quad (23)$$

$$\iff m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v_1 + m_2 v'_1 - m_2 v_2 \quad (24)$$

$$\iff (m_1 + m_2) v'_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_1 + m_2 v_2 \quad (25)$$

$$\iff v'_1 = \frac{2 m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (26)$$

De la même manière on trouve :

$$v'_2 = \frac{2 m_1 v_1 + v_2 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \quad (27)$$

Remarquons que pour passer de v'_1 à v'_2 il suffit d'invertir les indices.

Cas où le corps 2 est immobile : collision d'un projectile sur une cible Il y a alors simplification des expressions puisque $v_2 = 0$:

$$\boxed{v'_1 = \frac{v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}} \quad \boxed{v'_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}} \quad (28)$$

Que se passe t-il dans des rapports particuliers entre m_1 et m_2 :

– Si le projectile est beaucoup plus léger que la cible :

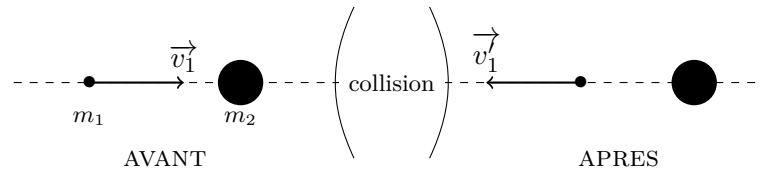


FIGURE 5 – Projectile léger, cible lourde

$$v_1' = -v_1 \quad v_2' = 0 \quad (29)$$

Le projectile revient en arrière avec une vitesse identique à celle qu'il avait initialement. La cible ne bouge pas du fait de son inertie : un exemple serait la balle de tennis de table arrivant sur une boule de pétanque.

- Si le projectile est beaucoup plus lourd que la cible :

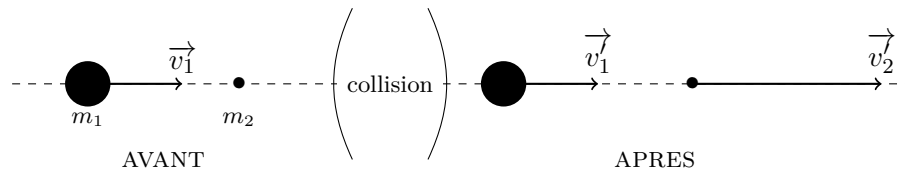


FIGURE 6 – Projectile lourd, cible légère

$$v_1' = v_1 \quad v_2' = 2v_1 \quad (30)$$

La cible part avec une vitesse double par rapport à celle qu'avait initialement le projectile : c'est le principe du service au tennis.

- Si $m_1 = m_2$, alors :

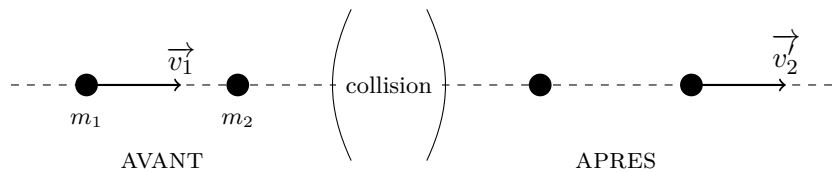


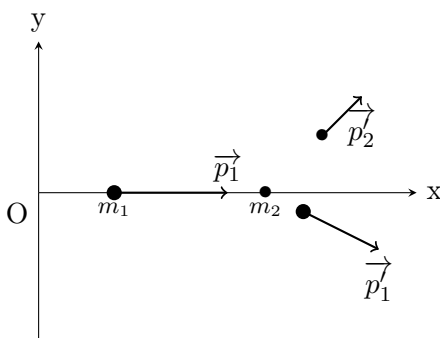
FIGURE 7 – Projectile et cible de même masse

$$v_1' = 0 \quad v_2' = v_1 \quad (31)$$

Il y a transfert de vitesse, c'est le principe du carreau à la pétanque ou des oscillations du pendule de Newton (celui avec tous les pendules simples juxtaposés).

5.3.2 Collision élastique à deux dimensions

Cas de la collision de deux objets ponctuels Si on travaille toujours dans un plan, on peut définir deux axes Ox et Oy perpendiculaires entre eux :


 FIGURE 8 – Collision à deux dimensions :
ici 2 est fixe

Et appliquer la conservation de la quantité de mouvement selon ces deux axes :

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \quad (32)$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \quad (33)$$

Ainsi que la conservation de l'énergie cinétique :

$$m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = m_1 (v'_{1x}{}^2 + v'_{1y}{}^2) + m_2 (v'_{2x}{}^2 + v'_{2y}{}^2) \quad (34)$$

Ainsi, on a trois équations, on ne pourra trouver que trois inconnues. Même si on connaît quatre conditions initiales $(v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y})$, on ne pourra pas déterminer les quatre inconnues que sont $(v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{2x}, v'_{2y})$.

Pour résoudre un problème de ce type, un paramètre devra être fixé (voir TD).

Cas de deux objets non ponctuels : exemple particulier des billes de billard On considère deux billes de billard de même masse. La première est animée d'une vitesse \vec{v}_1 , la seconde est initialement immobile.

On néglige tout effet de frottement entre les surfaces des billes. La force de contact qui s'exerce entre elles est dirigée suivant la droite définie par les deux centres des billes : la bille 2 qui était immobile repart alors dans cette direction.

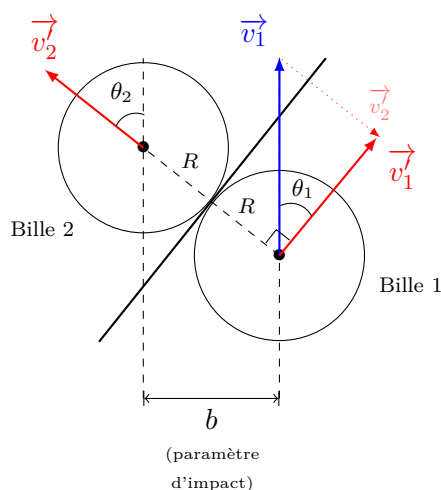


FIGURE 9 – Collision entre deux billes de billard dont une est immobile

Billes à 90° On remarque que les billes repartent à 90° l'une de l'autre. On peut le montrer ainsi :

On écrit les deux lois de conservation :

$$\text{De la quantité de mouvement : } m \vec{v}_1 = m \vec{v}'_1 + m \vec{v}'_2 \quad (35)$$

$$\text{De l'énergie cinétique : } \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2 \quad (36)$$

On simplifie les masses et les facteurs $\frac{1}{2}$ et on met l'équation de conservation de la quantité de mouvement au carré :

$$\vec{v}_1^2 = (\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2)^2 \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (\text{car } v_1^2 = \vec{v}_1^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) \quad (37)$$

La comparaison de ces deux expressions conduit nécessairement à $\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$ soit $\vec{v}'_1 \perp \vec{v}'_2$.

Relations entre les vitesses après la collision et les angles Sur la figure 9, on peut noter que $v'_1 = v_1 \cos \theta_1$ et $v'_2 = v_1 \cos \theta_2$. Ces relations se démontrent également avec les équations (35) et (36) :

Pour v'_1 :

$$\text{On a : } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_1 = (\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2) \cdot \vec{v}'_1 = v'^2_1 \quad \text{car } \vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0 \quad (38)$$

$$\text{Et : } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_1 = v_1 v'_1 \cos \theta_1 \quad (39)$$

La comparaison de ces deux expressions donne : $v'_1 = v_1 \cos \theta_1$.

Pour v'_2 :

$$\text{On a : } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_2 = (\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2) \cdot \vec{v}'_2 = v'^2_2 \quad \text{car } \vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0 \quad (40)$$

$$\text{Et : } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_2 = v_1 v'_2 \cos \theta_2 \quad (41)$$

La comparaison de ces deux expressions donne : $v'_2 = v_1 \cos \theta_2$.

Relations entre les angles et le paramètre d'impact b Sur la figure 9, on peut noter que :

$$\sin \theta_2 = \frac{b}{2R} \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) = \cos \theta_1 = \frac{b}{2R} \quad (42)$$

Le rayon des billes et le paramètre d'impact sont les données qui permettent de calculer toutes les grandeurs après collision dans ce cas.

5.4 Collision inélastique

Une collision est qualifiée d'inélastique lorsque **l'énergie mécanique du système n'est pas conservée** : il peut y avoir création ou disparition de corps après le choc, ou bien modification de l'état interne des objets. C'est donc l'énergie interne du système qui est modifiée lors d'une collision inélastique.

Lorsque l'on considère des objets macroscopiques, il y a souvent disparition d'énergie sous forme de chaleur.

Pour les particules microscopiques, il peut y avoir transformation d'énergie en masse (équivalence masse-énergie) et création de particule(s) ou inversement, transformation de masse en énergie et disparition de particules.

Par contre, pour un système isolé, la loi de conservation de la quantité de mouvement totale reste valable.

Exemple

La plupart des collisions sont bien entendues inélastiques. Pour caractériser celles-ci on peut définir un coefficient de restitution, noté e , qui va comparer la vitesse relative des deux corps avant le choc et la vitesse relative des deux corps après le choc.

Dans le cas d'une collision directe (sur un seul axe) :

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (43)$$

Ainsi si ce coefficient est égale à 1 (on retrouve alors l'équation 22) , la collision est parfaitement élastique, pour les collisions inélastiques, $e < 1$.

La collision la plus classique est celle de la balle sur le sol : plus le coefficient e sera important, plus le rebond de la balle sera haut ... (voir TD).
Le coefficient de restitution n'étant pas égal à 1, l'énergie perdue est transformée le plus souvent en chaleur ... chose classique.

Références

- "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ;
- <http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.roussel/meca/pdf/2corps.pdf> ;
- http://profs.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nya/note_nya/NYA_XXI_Chap%203.11b.pdf ;
- <http://physique.belledonne.pagesperso-orange.fr/Mecanique/07-Collisions.pdf> ;
- <http://www.physique-eea.unicaen.fr/~boilley/mecasol4.pdf> ;
- <http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-billiards.html> ;
- Document PHQ110 : mécanique 1, de David Sénéchal