TD M24 : systèmes de deux corps isolés

Exercice 1 : deux masses et un ressort horizontal

Deux points M$_1$ et M$_2$ de masses respectives m et $2\,m$ sont reliées par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
Ces deux points peuvent se mouvoir librement et sans frottement le long d'un axe Ox horizontal.
À $t = 0$, on comprime le ressort qui a alors une longueur d puis on le lâche sans communiquer de vitesse au centre d'inertie du système.

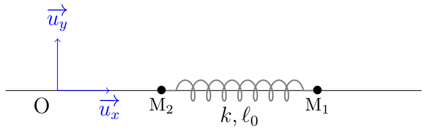

FIGURE 1 – Deux masses reliées à un ressort horizontal

1. Déterminer le mouvement du centre d'inertie G du système.
2. Écrire la relation définissant le centre d'inertie du système en fonction de $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ (relation (*)).
   Exprimer la longueur ℓ du ressort en fonction de $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ (relation (**)).
3. Déduire de (*) et (**), les expressions de $\overrightarrow{GM_1}(t)$ et $\overrightarrow{GM_2}(t)$ en fonction de la longueur $\ell(t)$ du ressort.
4. Quelle est la particularité du référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$? Utiliser celle-ci pour établir l'équation différentielle vérifiée par la longueur $\ell(t)$ du ressort.

   Indice
   Travailler sur $\overrightarrow{GM_1}(t)$ suffit à obtenir l'équation différentielle en $\ell(t)$.
5. Après avoir résolu cette équation, en déduire les deux fonctions $\overrightarrow{GM_1}(t)$ et $\overrightarrow{GM_2}(t)$.
6. Justifier le fait que l'on peut utiliser la notion de mobile réduit dans ce problème.
7. Utiliser la notion de mobile réduit pour retrouver les expressions de $\overrightarrow{GM_1}(t)$ et $\overrightarrow{GM_2}(t)$.

Exercice 2 : deux masses et un ressort incliné

On reprend le même genre de système que l'exercice précédent, cette fois-ci, le point M$_1$ a la masse $\frac{m}{3}$ et le point M$_2$ la masse m.
La masse du ressort est toujours négligeable, sa constante de raideur est k et sa longueur à vide ℓ_0.

Par contre ici, le système glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

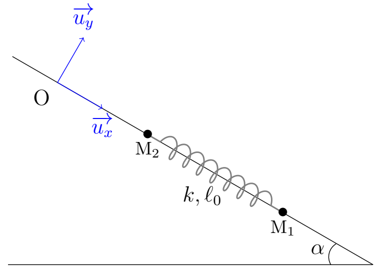

FIGURE 2 – Deux masses liées à une ressort incliné

Connaissant les conditions initiales :
- Point M$_2$ en O à $t = 0$;
- Allongement x_0 du ressort à $t = 0$;
- Vitesse initiale du système nulle.

On cherche à déterminer le mouvement de M$_1$ et M$_2$ dans le référentiel du laboratoire.
Ces mouvements sont la combinaison :
- du mouvement du centre d'inertie G par rapport au référentiel du laboratoire ;
- du mouvement des points M$_1$ et M$_2$ dans le référentiel barycentrique.

Il faut donc travailler par étapes :

1. Mouvement du centre d'inertie :
   Appliquer le théorème du centre de masse dans le référentiel du laboratoire au système constitué des deux masses et du ressort afin de déterminer l'expression de $x_G(t)$, position du centre d'inertie du système .
   Montrer que :
   $$x_G(t) = g\,\sin\alpha\frac{t^2}{2} + \frac{x_0 + \ell_0}{4} \qquad (25)$$

   Indices
   Deux constantes seront à déterminer, il faudra donc utiliser les deux conditions initiales.
   Pour exploiter l'une des deux, il faut écrire l'expression de $\overrightarrow{OG}$ d'après la définition du barycentre du système. Cette expression servira de nouveau ultérieurement.
2. Notion de mobile réduit :
   2.1. Appliquer, dans le référentiel du laboratoire, le principe fondamental de la dynamique aux deux points M$_1$ et M$_2$.
   2.2. Projeter les relations précédentes sur l'axe Ox et en déduire des expressions de $\ddot{x}_{M_1}$ et $\ddot{x}_{M_2}$.
   2.3. Soustraire membre à membre les deux équations précédentes pour faire apparaître l'équation différentielle relative à $r = x_{M_1} - x_{M_2}$, position du mobile fictif par rapport au centre de masse G du système.
   Préciser ce que vaut la masse réduite du mobile fictif.
   2.4. Résoudre cette équation différentielle et montrer que :
   $$r(t) = x_0\,\cos(\omega_0\,t) + \ell_0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \qquad (26)$$

3. Mouvement de M_1 et M_2 dans le référentiel du laboratoire :
Se servir de l'expression de $\overrightarrow{OG}$ établie précédemment pour exprimer $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_2M_1}$. Puis en déduire les expressions de $\overrightarrow{OM_1}(t)$ et $\overrightarrow{OM_2}(t)$ en fonction de $\alpha, x_0, \ell_0, \omega_0$.

Indice
Partir de $\overrightarrow{OM_1}(t)$ et utiliser la relation de Chasles.

Exercice 3 : rebonds verticaux d'une balle

Dans cet exercice, on considère un choc à une dimension. Les vitesses seront algébriques.

1. On considère un choc entre deux corps de masses m_1 et m_2.
   1.1. Écrire la loi de conservation de la quantité de mouvement, valable pour toutes collisions.
   1.2. A partir de l'équation précédente et de la définition du coefficient de restitution e, établir les expressions de v_1' et v_2', vitesses des deux corps après le choc en fonction de m_1, m_2, e, et v_1 et v_2, vitesses des corps avant le choc.
   On donne l'expression de v_1' :
   $$v_1' = \frac{m_1\, v_1 + m_2\, v_2}{m_1 + m_2} - e\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \qquad (60)$$
   1.3. Que représente le premier terme dans chacune des deux expressions ?
   1.4. Que deviennent v_1' et v_2' pour un choc totalement inélastique ? Imaginer et décrire un exemple concret de ce type de collision.

2. On laisse tomber une balle sur une surface horizontale rigide (comme la Terre). La masse de la balle est m, la hauteur initiale de chute est h_0. Le corps 1 est la balle, le corps 2 est la Terre.
   2.1. Que devient l'expression de v_1' dans ce cas ?
   2.2. Calculer la vitesse d'arrivée au sol de cette balle (v_1 : vitesse avant le choc) après sa chute de h_0 ($2^{\text{ème}}$ loi de Newton).
   2.3. A quelle hauteur remonte alors la balle ? Exprimer cette hauteur notée h_1 en fonction de $v'1$ puis de h_0 et e.
   2.4. A quelle hauteur rebondira le n-ième rebond ?

Exercice 4 : collision directe

Un bloc de 3 kg qui se déplace à 2 m.s^{-1} vers la droite subit une collision élastique frontale avec un bloc de 6 kg qui se déplace de 10 m.s^{-1} vers la gauche.
Les frottements sont négligeables.

Question : déterminer les vitesses des blocs immédiatement après la collision.

Exercice 5 : collision élastique à deux dimensions

Sur une surface horizontale sans frottement, deux corps en métal subissent une collision élastique.
Avant la collision, le corps 1 de masse 4 kg se déplace à 2 m.s^{-1} vers l'est, et le corps 2 de masse 8 kg est immobile.
Après la collision, le corps 1 se déplace à 36.9° au sud de l'est.

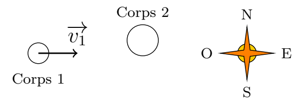

Figure 3 – Etat initial de la collision à deux dimensions

Question : Déterminer les modules des vitesses des corps 1 et 2 après la collision ainsi que l'orientation de la vitesse du corps 2.

Références

— Source exercice 1 : applications 3 et 4 p 303 "Précis Mécanique PCSI" Bréal 2003 ;
— Source exercice 2 : méthode 4 p 315 "Précis Mécanique PCSI" Bréal 2003 ;
— Source exercice 3 : un cours de mécanique récupéré ;
— Source exercice 4 : http://profs.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nya/note_nya/NYA_XXI_Chap%203.11a.pdf ;